UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

Funções Trigonométricas pelo olhar de licenciandos de Matemática com o uso do GeoGebra

Joyce dos Santos Vergilio

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PELO OLHAR DE LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA COM O USO DO GEOGEBRA

JOYCE DOS SANTOS VERGILIO

Sob a orientação da Professora
Dora Soraia Kindel

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-Graduação em Educação Ciências e Matemática, Área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

Seropédica - RJ
Julho de 2023

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V497 f
Vergilio, Joyce dos Santos, 1997-
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PELO OLHAR DE LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA COM O USO DO GEOGEBRA / Joyce dos Santos Vergilio. - Nova Iguaçu, 2023.
105 f.: il.

Orientadora: Dora Soraia Kindel.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT), 2023.

1. Funções Trigonométricas. 2. Educação Matemática. 3. GeoGebra. 4. Licenciandos em Matemática. I. Kindel, Dora Soraia, 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TERMO Nº 877/2023 - PPGEDUCIMAT (12.28.01.00.00.00.00.18)

Nº do Protocolo: 23083.050240/2023-82

Seropédica-RJ, 02 de agosto de 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

JOYCE DOS SANTOS VERGILIO

Dissertação/Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáitca, área de Concentração em Educação.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 11 / 07 / 2023

Dora Soraia Kindel Dra. UFFRJ
(Orientador)

Marcelo Almeida Bairral Dr. UFRRJ

Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto Dra. IFF

Documento não acessível publicamente

(Assinado digitalmente em 03/08/2023 18:21)

DORA SORAIA KINDEL
PROFESSOR DO
MAGISTERIO SUPERIOR
DeptES (12.28.01.00.00.86)

Matrícula: ###209#1

(Assinado digitalmente em 03/08/2023 01:01)

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL
PROFESSOR DO
MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTPE
(12.28.01.00.00.00.00.24)

Matrícula: ###988#2

(Assinado digitalmente em 03/08/2023 16:17)
GILMARA TEIXEIRA BARCELOS PEIXOTO
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.697-##

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me sustentado nesse ciclo, estando sempre comigo me dando força e saúde. Agradeço por Seu incondicional amor “[...] Agora, pois, permanecem a fé, a esperança e o amor, estes três; porém o maior destes é o amor” (1Coríntios 13:13).

À minha mãe Simone dos Santos por sempre acreditar em mim, até mesmo nos momentos em que nem eu acreditava. Agradeço por nunca me deixar sozinha, por sempre lutar por mim, me apoiar e me amar. Às minhas irmãs Gabriella Ramos e Isabella Ramos por sempre tirarem um sorriso de mim, até mesmo nos dias mais cansativos.

Ao meu amigo, companheiro para todas as horas, namorado (e futuro marido) Lorhan Costa, por sempre estar ao meu lado e apoiar meus projetos. Por ter, em todos os momentos que desejei desistir, me motivado a continuar reforçando o quanto eu sou capaz. A gente é forte!

Aos meus familiares pelo apoio, compreensão e zelo.

À minha orientadora e mãe acadêmica, Soraia Kindel por ter escolhido me orientar e não ter soltado minha mão em nenhum momento. Às amigas Cristina e Andreza que compartilharam muitos momentos de agonia, desespero e alegria comigo. À Ana Lúcia sempre com suas falas de motivação. Aos colegas que fiz durante o mestrado, muito obrigada!

Aos professores do PPGEduCIMAT.

Ao professor Marcelo Bairral e à professora Gilmara Teixeira por terem aceitado compor minha banca de defesa.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, muito obrigada!

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 001. “This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – finance code 001”.

RESUMO

VERGILIO, J. S**. Funções Trigonométricas pelo olhar de licenciandos de matemática com o uso do GeoGebra.** 2023. 104 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2023.

Diante do momento educacional que vivenciamos, durante a pandemia do Covid-19, as Tecnologias Digitais se tornaram ferramentas essenciais para o desenvolvimento dos processos cognitivos de ensino e de aprendizagem. Essa pesquisa de mestrado profissional faz uso das Tecnologias Digitais e de Ambientes Virtuais, que integram o GeoGebra, para desenvolver atividades com o objetivo analisar as interações dos participantes da pesquisa e a interatividade com os ambientes virtuais ao vivenciarem tarefas sobre Funções Trigonométricas com tecnologias digitais em um curso noturno de licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio deJaneiro. Para orientar os caminhos de pesquisa utilizamos como base metodológica o Design BasedResearch(DBR) que visa um diálogo da pesquisa com o campo em que ela é realizada, essencial para uma pesquisa de mestrado profissional. Como instrumentos de coleta de dados recorremos à questionários semiabertos e individual, respostas escritas às tarefas e as anotações do diário de campo. Buscamos identificar como ocorre a aprendizagem de conceitos sobre Funções Trigonométricas. Como produto de pesquisa, composto por tarefas elaboradas para pesquisa, formamos um caderno de tarefasdestinado para ser utilizado na formação inicial e continuada de professores e com alunos do Ensino Médio. Esperamos que essa pesquisa contribua para o desenvolvimento de pesquisas na área de ensino e aprendizagem de Funções Trigonométricas de maneira diferente do tradicional.

Palavras- chave: Funções Trigonométricas; Licenciandos em Matemática; GeoGebra.

ABSTRACT

VERGILIO, J. S. Trigonometric functions through the eyes of mathematics undergraduat esusing GeoGebra. 2023. 101 p. Dissertation (Master in Science and Mathematics Education). Institute of Education, Federal Rural Universityof Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2023.

In view of the educational moment we are experiencing, during the Covid-19 pandemic, Digital Technologies have become essential tools for the development of cognitive teaching and learning processes. This professional master's research makes use of Digital Technologies and Virtual Environments, which are part of GeoGebra, to develop activities of an investigative/exploratory nature with the objective of generating potentially significant tasks for the study of Trigonometric Functions through the analysis of the ideas of undergraduates of mathematics of an evening course at the Federal Rural University of Rio de Janeiro. To guide the research paths, we used Design Based Research (DBR) as a methodological basis, which aims at a dialogue between the research and the field in which it is carried out, essential for a professional master's research. As data collection instruments, we resorted to semi-open and individual questionnaires, written responses to tasks and field diary notes. We seek to identify how the learning of concepts about Trigonometric Functions occurs. As a research product, consisting of tasks designed for research, we formed a task book intended to be used in the initial and continued training of teachers and high school students. We hope that this research will contribute to the development of research in the area of teaching and learning Trigonometric Functions in a different way than the traditional one.

Keywords: Trigonometric Functions; Bachelors in Mathematics; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE APÊNDICES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AGD – Ambiente de Geometria Dinâmica.

DBR – Design BasedResearch.

TD – Tecnologias Digitais.

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso.

TICs – Tecnologias da Informação e Comunicação.

UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

PPGEduCIMAT – Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No ano de 2020, ano em que ingressei no Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) e com o surgimento da Covid-19 se fez necessário medidas sanitárias que previam o afastamento social, com isso as aulas presenciais em todos os níveis escolares foram suspensas. Desta maneira, muitas mudanças foram realizadas no âmbito da educação, ou seja, na maneira de ensinar e aprender durante as aulas, e não foi diferente quanto ao ensino de Matemática. Nesse momento, iniciou-se um movimento para o uso de Ambientes Virtuais e ferramentas tecnológicas para dar continuidade nos processos educacionais.

Assim,observamos um novo tipo de comportamento da sociedade e esse, por sua vez, acarretou uma nova maneira de ensinar, o Ensino Remoto, que por hora foi considerada como uma medida de ensino emergencial. As ferramentas tecnológicas como: computadores, *tablets*, celulares, *notebooks* e a internet, tornaram-se imprescindíveis para a existência desses processoscognitivos de ensino e aprendizagem escolar.

A educação por meio do Ensino Remoto fez com que professores e alunos tivessem que se adaptar rapidamente a metodologias diferentes, e como tudo que se inicia sem um planejamento, problemas surgiram (FLORES; DO ROSÁRIO LIMA, 2021) (DE AZEVEDO; PUGGIAN, 2020).

Se já era difícil conseguir a atenção de todos os alunos em um espaço físico, agora - em um Ambiente Virtual - se tornou algo ainda mais árduo. Professores tiveram que pensar, pesquisar e aprender formas diferentes para ensinar e avaliar o rendimento dos seus alunos nesse novo espaço.

Porém, apesar da diferença entre as duas modalidades, presencial e remoto, algumas ideias, conceitos ou tecnologias podem ser utilizados em ambos. Por exemplo, podemos fazer uso de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) tanto no espaço físico quanto no ambiente virtual. Assim como podemos utilizar características de outras modalidades como o Ensino Online que puderam ser adaptadas e aproveitadas no Ensino Remoto.

Pesquisas como Borba (2014) e Bairral (2017, 2019), defendem a prática e a utilização de Tecnologias Digitais em sala de aula de matemática com o objetivo de potencializar os processos de ensino e de aprendizagem propondo tarefas que possibilitam a investigação e exploração de conteúdos matemáticos de forma a permitir aos estudantes conjecturarem sobre conceitos, propriedades e operações matemáticas. Porém, mesmo com os recursos tecnológicos como um instrumento de ensino à disposição de professores e alunos ainda é possível observarmos, em nosso dia a dia, que existem escolas e professores que primam pelo não uso dessas tecnologias, seja pela falta de aparelhos tecnológicos ou por escolha pessoal.

Em consonância com esses autores com o intuito de potencializar o ensino e a aprendizagem de conceitos, para desenvolver nossa pesquisa utilizaremos o GeoGebra juntamente com atividades planejadas para ensino por meio de Tecnologias Digitais, a fim de promover uma interação entre licenciandos em matemática sobre as Funções Trigonométricas e conceitos necessários para compreendê-las. Devido ao momento em que nossa pesquisa foi desenvolvida, pudemos observar comportamentos e características dos participantes tanto em aulas remotas quanto em aulas presenciais na discussão de conceitos.

A compreensão de conceitos é essencial para o entendimento dos conteúdos matemáticos e, no que se refere às Funções Trigonométricas, existem diversos conceitos a serem discutidos por professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, buscando tornar o conteúdo de Funções Trigonométricas tangível para a aprendizagem dos estudantes.

Este texto apresenta uma pesquisa de mestrado profissional concluída baseada na metodologia do Design BasedResearch (DBR) tendo como público-alvo licenciandos de matemática do campus de Nova Iguaçu da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. E prevê como subproduto um caderno detarefas destinadas para professores de matemática com a finalidade de subsidiá-los com um roteiro de atividades sobre funções Trigonométricas que poderão ser aplicadas junto aos estudantes do Ensino Médio e da licenciatura em Matemática.

Este trabalho se insere na linha de pesquisa 2 - Ensino e aprendizagem de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (PPGEduCIMAT - UFRRJ) em que se discute elaborar e analisar situações de aprendizagem nos diferentes níveis de ensino.

Nesse primeiro capítulo, além de situar o momento da pesquisa, buscamos apresentar a motivação, o problema de pesquisa, os objetivos e o que abordaremos em cada um dos capítulos seguintes.

Motivação

Durante minha formação acadêmica pude perceber que eu tinha algumas lacunas de aprendizagem, entre elas, aquelas que considero serem necessárias para entender Funções Trigonométricas, bem como o próprio conteúdo de Funções Trigonométricas.

Quando cursava o 9° ano do Ensino Fundamental no ano de 2012, me foram apresentadas as Relações Trigonométricas tendo como base apenas os livros didáticos, utilizando as definições neles apresentadas e utilizando muitos exercícios e exemplos modelos para proporcionar a almejada compreensão. Da forma como foram apresentadas, não entendia o porquê de estar realizando aquelas operações matemáticas e também não conseguia compreender suas relações com o triângulo.

Nas séries seguintes, 1° e 2° anos do Ensino Médio, tive uma breve apresentação do Ciclo Trigonométrico com o objetivo de apresentar e/ou introduzir o estudo das Funções Seno e Cosseno e em sequência o estudo dessas funções vistas no plano cartesiano. Esse conteúdo também se deu de forma tradicional, ou seja, foram apresentadas as definições, alguns exemplos e exercícios para serem feitos conforme o modelo, mas nenhum estudo diferenciado sobre suas características e/ou análise sobre o comportamento gráfico que ocorrem através das mudanças promovidas em diferentes parâmetros.

Sem compreender de onde vinham aquelas definições, sem conseguir visualizar as relações nos triângulos e sem saber como estabelecer conexão entre o Ciclo Trigonométrico e as Relações Trigonométricas passei a ter cada vez mais dificuldades para entender qualquer conteúdo que tivesse esses conteúdos como base.

Ao ingressar na graduação em Licenciatura em Matemática na UFRRJ, a não compreensão dos conteúdos da Educação Básica dificultou a compreensão das disciplinas. Pude perceber que as dificuldades que eu encontrara não eram vivenciadas apenas por mim, muitos dos meus colegas de turma, na graduação, também apresentavam esta dificuldade e mal podíamos nos ajudar mutuamente.

Em algumas disciplinas, como as de Cálculo Diferencial e Integral, as ementas partiam de um ponto que assumiam que tínhamos o conhecimento sobre Funções Trigonométricas e que dominávamos bem. Entretanto, era notável a falta desse conhecimento na hora de desenvolvermos os exercícios. Foi nesse momento que pude perceber a importância do estudo de Funções Trigonométricas e como a não compreensão de determinados conteúdos no Ensino Médio e Fundamental me faziam faltam e notei que precisava estudar alguns conceitos necessários para entendê-las.

Aos poucos também foi possível verificar a sua importância fora do contexto das aulas de Cálculo, pois ela aparece em estudos envolvendo os fenômenos ondulatórios, na Astronomia, na Física e nas Engenharias.

Mas o momento crucial para a escolha desse tema na pesquisa de mestrado foi quando cursei as disciplinas de licenciatura - Laboratório de Matemática para o Ensino de Educação Básica I e II que visava discutir, elaborar apresentações e métodos de ensino de alguns tópicos estudados na educação básica como: transformações gráficas de funções, trigonometria no triangulo retângulo, estudo da circunferência, conceitos estatísticos, entre outros.

Nessas aulas as lacunas de aprendizagem desses conceitos ficaram ainda mais evidentes, pois não conseguia responder perguntas que em breve eu teria que explicar para os meus alunos. Por exemplo, como explicar o que é um radiano, como mostrar a relação entre os coeficientes e as suas implicações nas transformações nos gráficos de Funções básicas e suas consequências e como discutir e relacionar o Ciclo Trigonométrico com as relações trigonométricas. Parando para refletir e discutir estas questões pude vivenciar situações em que comecei a entender e perceber os conceitos e as conexões existentes entre Razões Trigonométricas e os de Funções Trigonométricas, porém algumas conexões ainda não haviam sido estabelecidas e eu ainda continuava me sentindo insegura para falar sobre ao assunto.

O outro momento em que pude observar esta dificuldade, principalmente na questão gráfica, foi durante a participação em um projeto[1]no qual eu ministrei oficinas de apoio para a disciplina de Cálculo I - que tinha como propósito contribuir para a redução da taxa de evasão e reprovação dela, a dificuldade de entender transformações nos gráficos de funções eram constantes, era comum que os participantes soubessem resolver as questões algebricamente, mas se questionados sobre qualquer coisa que fizesse alusão àlguma transformação gráfica, eles não sabiam ou apresentavam dificuldades para responder. Visto que pude observar que minhas dificuldades eram compartilhadas com licenciados de matemática e professores da educação básica, escolhi como tema de pesquisa do mestrado as Funções Trigonométricas.

A descrição de minha trajetória visa esclarecer o interesse pelo estudo das Funções Trigonométricas, pelo uso de tecnologia e outros materiais em sala de aula, assim como acrescente expectativa de dinamizar o ensino dos conteúdos da disciplina, estimulando em particular identificar a relação entre a interferência dos parâmetros na representação gráfica e afins com os estudantes da Educação Básica. Diante do exposto, levantamos o seguinte problema:

Quais ideias surgem na interação de licenciandos de matemática em atividades exploratórias sobre Funções Trigonométricas usando recursos tecnológicos?

Como metodologia para orientar a pesquisa, escolhemos a DBR, que devido a suas características permite a participação dos pesquisadores e requer uma produção de um produto que dialogue com o contexto de pesquisa.

Objetivos

[1]Projeto Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen*. Orientado pelo Professor Dr. Marcelo Almeida Bairral (DTPE/UFRRJ).

O objetivo geral consiste em analisar as interações dos participantes da pesquisa e a interatividade com os ambientes virtuais ao vivenciarem tarefas sobre Funções Trigonométricas com tecnologias digitais.

Os objetivos específicos são:

- Identificar o conhecimento prévio dos estudantes sobre o tema.
- Elaborar tarefas para serem realizadas em ambiente virtuais e presenciais sobre Funções Trigonométricas.
- Gerar um caderno de tarefas para ser utilizado por professores que ensinam matemática no Ensino Médio ou na formação inicial/continuada de professores de matemática.

As análises serão feitas através de dados obtidos em tarefas propostas para os licenciandos desenvolvidas nas aulas da disciplina de Ensino de Matemática II, cujo objetivo é apresentar e discutir os conteúdos do Ensino Médio.

Organização

No primeiro capítulo, apresentamos um levantamento bibliográfico que é composto por pesquisas que possuem como tema as Funções Trigonométricas. O levantamento foi feito através de uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, o objetivo deste capítulo é compreender quais pesquisas estão sendo realizadas nos últimos anos e que similaridades possuem com nosso trabalho.

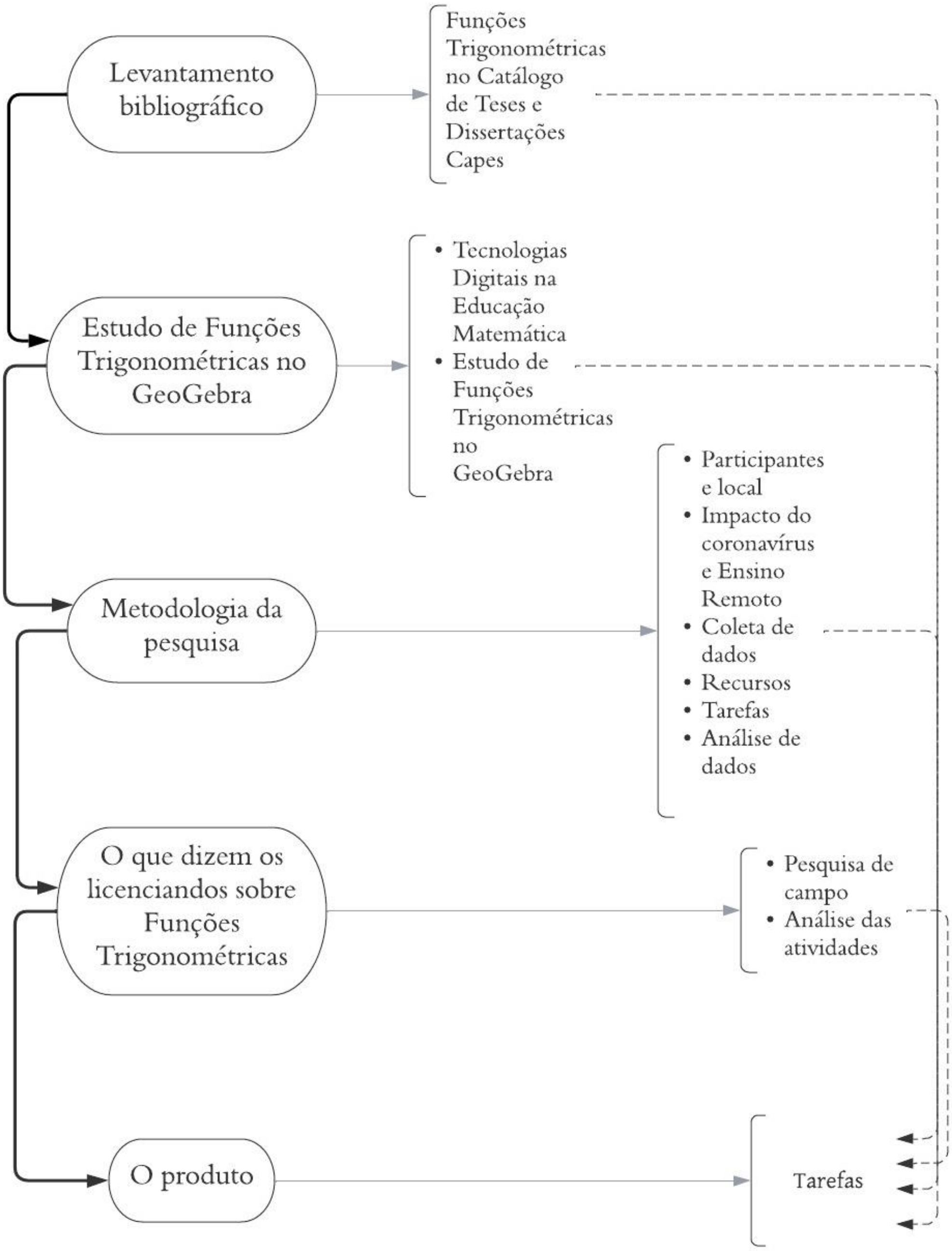
Com o objetivo de apresentar um estudo sobre Funções Trigonométricas e conceitos envolvidos, focando nas Funções Seno, Cossecante e Arco-Seno, o segundo capítulo apresenta um estudo dessas funções com o GeoGebra.

O terceiro capítulo é destinado para relatar o desenvolvimento da pesquisa como a metodologia de pesquisa, o local, os participantes, os recursos, como desenvolvemos as tarefas, coleta de dados e como se deu a análise dos dados obtidos no campo de pesquisa.

No quarto capítulo é apresentada a análise feita sobre as atividades realizadas pelo/com os participantes da pesquisa bem como suas ideias. E no quinto capítulo, apresentamos o fruto da nossa pesquisa, o produto que geramos com tarefas propostas sobre o conteúdo de Funções Trigonométricas com o GeoGebra, exceto a Tarefa 1.

Quanto às fases do desenvolvimento da pesquisa, estão apresentadas esquematicamente na Figura 1, a seguir:

Figura 1: Esquema de organização da dissertação



Fonte: elaboração da autora.

Ao final, apresentamos conclusões do trabalho, sugestões, limitações e propostas para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1 - LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Para desenvolver a pesquisa, buscamos entender e conhecer quais pesquisas foram realizadas nos últimos anos sobre Funções Trigonométricas, pois não é possível alcançar bons resultados de pesquisas sem primeiro compreender a literatura sobre o assunto de estudo (Boot; Beile, 2005 apud Randolph, 2009).

Com o objetivo de analisar quais conteúdos estão sendo pesquisados, que teorias estão sendo utilizadas, o público-alvo e/ou resultados alcançados e que similaridades possuem com a nossa pesquisa, neste capítulo, realizamos um levantamento através de localização e consulta de pesquisas cadastradas no banco de dados da Capes, através do Catálogo de Dissertações e Teses.

Numa primeira busca, a maior dificuldade encontrada foi em relação à abrangência das palavras-chave que foram utilizadas em um primeiro momento - Funções Trigonométricas, Seno, Cosseno e Arco-seno. Buscamos termos que pudessem delimitar o problema de pesquisa e retratar o panorama de pesquisas que envolvessem o tema em desenvolvimento, por fim escolhemos como palavra-chave: Funções Trigonométricas - o tema principal da pesquisa, pois as pesquisas que encontramos com as demais palavras-chave eram comuns aos trabalhos utilizando apenas essa palavra.

Para buscar as pesquisas, a ferramenta identifica os termos separadamente e as encontra nos títulos, resumos e palavras-chave das pesquisas cadastradas na base de dados. Sendo assim, tivemos o retorno deu m grande quantitativo de trabalhos em que a maioria não estava relacionada com o nosso objetivo de pesquisa que considera o ensino e a aprendizagem do conceito de Funções Trigonométricas.

A fim de solucionar esse problema, fizemos uso do operador booleano AND, como aponta Assis (2020), entre as palavras-chave. Dessa forma, o levantamento ficou restrito aos trabalhos que tinham relação com o tema Funções Trigonométricas, assim reduzindo, consequentemente, o quantitativo de trabalhos registrados, ver resultado na Tabela 1.

Tabela 1: Primeiro levantamento de dissertações e teses no catálogo Capes

Palavras-chave	**Dissertações**		**Teses**	
	Sem operador	Com operador	Sem operador	Com operador
Funções Trigonométricas	27572	190	10893	16

Fonte: elaboração da autora.

Entretanto, ao analisarmos amiúde, encontramos muitos trabalhos que não tinham relação direta com o ensino de Funções Trigonométricas. Ou seja, o tema estava relacionado à modelagem de fenômenos presentes nas áreas de Ciências Agrárias, Engenharias, Ciências Biológicas, entre outros, que não fazem parte do nosso interesse de pesquisa visto que o foco é o estudo do conceito na formação de professores e consequente ensino do conteúdo no Ensino Médio.

Diante disso, determinamos critérios de inclusão e exclusão das pesquisas. Como critérios de inclusão, formulamos as seguintes perguntas: *i*) o trabalho foi finalizado entre os anos de 2015 e 2021? *ii*) a pesquisa é das Áreas de conhecimento: Ensino de Ciências e Matemática e Matemática? *iii*) o estudo faz uso do GeoGebra.

Para os dois primeiros critérios, fizemos uso de dois filtros presentes na plataforma: Ano - com intuito de buscar pesquisas recentes, e Área de Conhecimento - para restringir para Ensino de Ciências e Matemática e Matemática, a partir dos resultados obtidos com os operadores booleanos.

E, tendo em vista que nossa pesquisa visa a utilização de Ambientes Virtuais dinâmicos que integram o GeoGebra para o estudo de Funções Trigonométricas, fizemos uma busca para analisar trabalhos que também abordaram em suas pesquisas o uso do GeoGebra utilizando nosso terceiro critério de inclusão. Para tanto, incluímos em nossa palavra-chave de pesquisas a palavra GeoGebra, obtendo os seguintes resultados, na Tabela 2.

Tabela 2: Levantamento de dissertações e teses no catálogo da Capes com filtros

Palavra-chave	**Dissertações**			**Teses**		
	Sem filtro	Com filtros	Incluindo “AND GeoGebra”	Sem filtro	Com filtros	Incluindo “AND GeoGebra”
Funções AND Trigonométricas	190	86	30	16	3	1

Fonte: elaboração da autora

Como Assis (2020) também aponta em sua pesquisa, no momento que realizamos o levantamento, havia uma divergência de valores de quantitativo de pesquisas retornadas e o de pesquisas presentes na plataforma. Das 31 pesquisas, apenas 19 estavam cadastradas na plataforma e tivemos acesso a 18 delas, pois a pesquisa de Nascimento (2019) não possui autorização para a divulgação. No

Quadro **1**, apresentamos os 19 trabalhos, ano de publicação, título e autor.

Quadro 1 - Trabalhos da plataforma Capes ao final do levantamento

Ano	**Título**	**Autor**
2015	O ensino da trigonometria usando o *software*GeoGebra como ferramenta de ensino-aprendizagem	Eilson Santiago
2015	GeoGebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio.	Denise Mansoldo Salazar
2015	Uma Proposta de Estudo de Funções Trigonométricas e Suas Inversas Através do Geogebra	Leila Maria Salomão de Souza
2015	As novas tecnologias no contexto escolar: Uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em trigonometria	Jander Carlos Silva e Silva
2016	Trigonometria e Funções Trigonométricas, uma abordagem didático metodológica	Andre Luiz dos Santos Ferreira
2016	Trigonometria: Um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do *software* GeoGebra	Glaucia Maria Queiroz De Freitas
2016	Ensino-aprendizagem de funções trigonométricas através do software GeoGebra aliado à Modelagem matemática	Enaldo Vieira De Melo
2016	Propostas para o ensino da trigonometria: Introdução à aproximações de funções periódicas por polinômios trigonométricos	Suellen Karina Palhano Iochucki
2017	Estudo de Funções Trigonométricas em dois ambientes de aprendizagem no ensino médio	Helder Lima Silva
2018	Ensino de Funções Trigonométricas com applets	Flavio Ribeiro De Souza Junior
2018	Uma sequência didática para o ensino de Funções Trigonométricas: Uma investigação sobre as contribuições do GeoGebra	Tatiane Ferreira Da Silva
2019	O uso do GeoGebra no ensino das Funções Trigonométricas no 2º ano do ensino médio no IFMT campus Cuiabá	Carlos Carlão Pereira Do Nascimento
2019	A interatividade do GeoGebra no auxílio da compreensão da trigonometria	Jairo Renato Araújo Chaves
2019	Funções Trigonométricas com o auxílio do GeoGebra.	Tiago Bezerra Da Costa
2019	Música e Funções Trigonométricas: Uma abordagem interdisciplinar	Mayck Gomes Marvila
2019	Funções Trigonométricas ou Função Trigonométrica: Uma análise histórica e institucional no Ensino Médio	Leticia Santos Meneses
2020	Funções Trigonométricas e aplicações: Uma proposta didática para o Ensino Médio usando o GeoGebra	John Nathan Pereira De Carvalho
2020	Geogebra: Uma proposta para o ensino de Funções Trigonométricas	Maxiel De Mesquita Machado
2021	Geogebra e o ensino de Funções Trigonométricas: Percepções dos estudantes do ensino médio	Fernanda Dos Santos Garcia

Fonte: elaboração da autora

Conseguinte, analisamos os 18 trabalhos e, para tanto, organizamos as pesquisas por proximidade de objetivos e/ou conclusão.

A pesquisa de Souza (2015), apresenta o resultado de um relato de experiência envolvendo uma atividade realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, o trabalho de Freitas (2016) que faz uso de um Estudo Dirigido com alunos do 3º e 2º anos do Ensino Médio e o de Costa (2019), faz uso do material disponibilizado nas escolas públicas do estado de São Paulo, o Caderno do Aluno, aliado ao GeoGebra buscando o dinamismo do conteúdo de Funções Trigonométricas para alunos do Ensino Médio.

Já a pesquisa de Iochucki (2016), tem como objetivo apresentar algumas propostas para o ensino-aprendizagem de trigonometria com base em aplicações em diferentes áreas do conhecimento e nas TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação). Então, para alcançar o seu objetivo, realizou um trabalho teórico apresentando os principais problemas sobre a aplicabilidade das funções trigonométricas ao longo da história. Este trabalho não prioriza diretamente tarefas sobre Funções Trigonométricas, mas enfatiza a importância do uso de história aliado as TICs e a aplicações de Funções Trigonométricas no ensino de matemática em sala de aula.

Em Ferreira (2016), observamos que se trata de um estudo teórico sobre história da trigonometria além de uma análise da estrutura curricular e metodológica dos conteúdos sobre Funções Trigonométricas fazendo uso da análise de livro didático. Como conclusão da pesquisa, o autor apresenta uma proposta de Sequência Didática a ser utilizada por professores do Ensino Médio com a intenção de que essas atividades possibilitem um canal dinâmico entre professores e alunos. Outras pesquisas como Júnior (2018), Meneses (2019), Carvalho (2020) e Machado (2020), também culminam em uma Sequência Didática a ser aplicada.

As pesquisas de Santiago (2015), Silva (2018), Chaves (2019) e Marvila (2019), apresentam uma Sequência Didática que foi aplicada em salas de aula da Educação Básica para alunos do 2º ano do Ensino Médio e analisam os dados obtidos.

Silva (2017) também apresenta uma Sequência Didática para alunos da educação Básica,ele aponta como uma das desvantagens encontradas ao final de sua pesquisa "a ausência nos alunos de um domínio dos conceitos e propriedades relativos às Funções Trigonométricas para identificar a amplitude, o período, o deslocamento horizontal e vertical;" (SILVA, 2017, p. 210).

Já Silva (2015), objetivou com seu trabalho nortear professores da educação básica para o uso do GeoGebra em aulas de trigonometria. Na sua pesquisa, o autor fomenta que "[...]

uma das possíveis características da educação moderna será o uso de novas tecnologias, amparadas por práticas pedagógicas ousadas e eficientes [..]” (SILVA, 2015, p. 29). Ele apresenta atividades em que gráficos são construídos e uma análise de parâmetros de Funções Trigonométricas é feita.

Salazar (2015) fez uso da metodologia da Engenharia Didática, a autora apresenta, aplica e analisa atividades para alunos do Ensino Médio. O foco de sua pesquisa são professores de matemática que lecionam no Ensino Médio, ela objetiva apresentar uma proposta “prática” a ser utilizada por eles e elas. A proposta apresentada pela autora aborda os parâmetros das funções trigonométricas através do software GeoGebra além disso, faz uso do aplicativo WhatsApp.

Na pesquisa de Garcia (2021), foi realizado um estudo de caso em duas turmas da segunda série do Ensino Médio em uma escola da rede privada. Com a elaboração e aplicação de uma Sequência Didática a autora relata que os estudantes encontraram dificuldades em utilizar o *software* alegando não ser intuitivo - contrariando outras pesquisas na área. A autora aponta que “[...] em atividades envolvendo o GeoGebra, por exemplo, os estudantes além de se apropriarem dos recursos disponíveis no software, eles também precisam aprender os conteúdos de matemática discutidos em aula e a própria linguagem matemática [...]” (GARCIA, 2021, p. 51).

Uma pesquisa participante é apresentada em Melo (2016) cujo objetivo foi analisar contribuições do GeoGebra aliado a Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem das Funções Trigonométricas seno e cosseno. Tendo como base teórica a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e como público-alvo alunos da segunda série do Ensino Médio, o autor elaborou uma Sequência Didática com cinco tarefas e um questionário com perguntas abertas e fechadas e concluiu que o uso da sequência didática aliada às tecnologias pode despertar o espírito de pesquisa/investigação nos discentes, contribuir para formação em tecnologia e promover a aprendizagem significativa sobre o assunto em questão.

Tanto Melo (2016) quanto Garcia (2021), tiveram como um dos objetivos compreender as percepções de estudantes do Ensino Médio sobre o uso do GeoGebra para o estudo de funções trigonométricas, porém observaram pontos distintos, como apresentado.

De modo geral, as pesquisas que localizamos defendem a importância de utilizar Tecnologias Digitais nos processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Porém, percebemos que mesmo após os critérios de inclusão e exclusão, alguns trabalhos não dialogavam diretamente com o que buscávamos. E percebemos que o que queríamos eram pesquisas que, além de utilizarem o GeoGebra tivessem como público alvo professores em formação inicial. Além de pesquisas que tiveram contato com o campo, pois nosso objetivo compreende em analisar ideias que licenciandos possuem sobre Funções trigonométricas.

Dessa maneira, procurando focalizar mais nossa busca observamos, na Tabela 3 apresentamos o número de trabalhos que possuem como público-alvo licenciandos e os trabalhos que além de apresentar uma proposta, aplicaram e analisaram de algum modo.

Tabela 3: Público-alvo, quantitativo e validação por aplicação

Público-alvo	Quantitativo	Validação por aplicação
Alunos do Ensino Médio	15	9
Licenciandos	0	0
Professores	3	1

Fonte: elaboração da autora.

As pesquisas que propõe uma Sequência Didática e as aplicam, posteriormente analisando os dados coletados, concorda que o GeoGebra pode potencializar e despertar o interesse dos alunos e, além disso, aumentar a participação desses nas aulas de Matemática

Considerando a escassez de pesquisas de mestrado profissional que tenham como foco a discussão do conceito de Funções Trigonométricas com licenciandos de matemática, nossa pesquisa pode se tornar relevante no campo do Ensino de Ciências e Matemática podendo contribuir para o desenvolvimento dessa área e para a formação de professores de matemática.

Para tanto, no próximo capítulo apresentaremos uma discussão em torno das Funções Trigonométricas com o GeoGebra, discorrendo previamente sobre as Tecnologias Digitais (TD) na aprendizagem de matemática.

CAPÍTULO 2 – ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO GEOGEBRA

Neste capítulo apresentaremos, um breve recorte sobre tecnologias digitais e ambientes virtuais no ensino e a aprendizagem de matemática e um estudo da função f(x) = sen (x) com o uso do GeoGebra, cabe ressaltar de antemão que este estudo pode ser realizado com todas as Funções Trigonométricas. A nossa proposta de estudo faz uso de TD objetivando compreensão de conceitos de maneira potencialmente significativa. Uma vez que, as tecnologias se fazem presentes em nosso cotidiano.

2.1. Tecnologias Digitais e Ambientes Virtuais no ensino e aprendizagem de matemática

O desenvolvimento e o uso de tecnologias são notórios e, nas últimas décadas, vêm se tornando cada vez mais presentes no cotidiano em diferentes áreas, inclusive no que tange a comunicação e necessidades sociais que surgem (VERGILIO; BAIRRAL, 2021). Essas se fazem presentes também nas salas de aula, incluindo as aulas de Matemática.

Essa emergência de se utilizar tecnologias em Educação Matemática se confirma em trabalhos recentes como o de Bairral e Menezes (2023), em que os autores apresentam dez capítulos cujo foco de estudo é a compreensão do processo de mapeamento de pesquisas e estudos em Educação Matemática. Além de apresentar diversas maneiras de mapeamento, o livro nos proporciona a possibilidade de aprender sobre as ferramentas tecnológicas para buscar informações nos bancos de dados digitais, inclusive no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes.

Variadas pesquisas em Educação Matemática propõem o uso de ferramentas tecnológicas, podemos notar "diversificados contextos, propostas e perspectivas com relação ao uso didático e pedagógico de tecnologias para investigação matemática" (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 20).

Para Souza (2007), "recurso didático é todo material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado, pelo professor, a seus alunos" (SOUZA, 2007, p. 111). Tais recursos podem ser variados, como lápis, caneta, quadro, compasso, regra, papel, celular, *tablet*, computador, entre outros.

A pesquisa de Bairral (2017) defende que recursos diferentes potencializam distintas maneiras de aprender e descobrir. Ou seja, utilizar papel e lápis gera uma aprendizagem diferente do uso de um Ambiente de Geometria Dinâmica para o estudo do mesmo conteúdo, por exemplo. Acreditamos que a nossa proposta tem o potencial de gerar a aprendizagem dos conceitos por meio de construções, explorações, discussões e conjecturas.

Salientamos que “[...] as tecnologias digitais propiciam investigações matemáticas, pois, com uma única atividade podem emergir outras perguntas, problemas, observação de regularidades, investigações e outros conceitos podem ser retomados ou abordados” (MISKULIN; RICHT, 2012, p. 2), diferente do que ocorre, habitualmente, nos livros didáticos em que as definições são apresentadas para iniciar o processo de ensino e aprendizagem.

Contudo, para trabalhar com TD no ensino de matemática, é necessário “o domínio de conteúdos, metodologias de ensino, recursos didáticos, teorias de aprendizagem e estratégias de ensino orientam o professor a desenvolver uma prática” (MISKULIN; RICHT, 2012, p. 4), já que é necessária por parte do professor a elaboração de tarefas que combinadas com a proposta metodológica da aula torne-a diferente de uma aula com abordagem tradicional e que os estudantes possam construir o seu conhecimento. Pois não basta apenas atividades diferentes, é preciso um ambiente diferente.

Assim, “consideramos que tanto a teoria contribui para o enriquecimento da pesquisa, quanto os resultados das investigações contribuem para a ampliação da teoria e, uma vez que são aplicados à prática profissional do docente, para sua melhoria” (SANTOS et al, 2012, p. 11), o que concorda diretamente com a metodologia que escolhemos para a pesquisa e os caminhos que percorremos.

Antes de elaborar tarefas, realizar pesquisa de campo e formular nosso produto foi essencial realizar o levantamento, que apresentamos no capítulo anterior, e estudar a Função Trigonométrica fazendo uso de uma ferramenta tecnológica, o GeoGebra.

Diferentes autores têm feito uso dessa ferramenta seja com o uso do software, do aplicativo, do site ou de ambientes que integram o GeoGebra. Assim como as pesquisas apresentadas no capítulo anterior.

O trabalho de conclusão de curso (TCC) de Gomes e Moreira (2008) que contribuiu para a criação de um GeoGebra*Book* [2] reúne *applets* para o estudo de Trigonometria no site do GeoGebra,já as pesquisas de Lobo e Bairral (2021) e Vergilio e Bairral (2021) apresentam e defendem o uso do GeoGebra para estudar Cálculo Diferencial e Integral, de forma diferente da tradicional, com o uso de *smartphones* são também exemplos desse uso.

Em Brito (2022) o produto educacional teve como foco a Semelhança de Triângulos, nessa pesquisa podemos observar uma apresentação do VMT, espaço que integra o GeoGebra.

---

[2]https://www.geogebra.org/m/eB5zhFvW

Apresentamos a seguir um estudo sobre funções trigonométricas, partindo das orientações feitas em livros didáticos, principalmente do Ensino Médio, e alguns artigos sobre o tema. Buscamos fundamentar os conceitos, as propriedades e entender como são feitas/apresentadas as conexões entre trigonometria e funções trigonométricas.

2.2. Um estudo de Funções Trigonométricas no GeoGebra

A Trigonometria está centrada na relação entre as medidas dos lados e ângulos dos triângulos, tendo como base o triângulo retângulo. Neste sentido, o triângulo pode ser historicamente, considerado de grande importância no desenvolvimento da matemática e do estudo de outras áreas como: astronomia, engenharia civil e música (IOCHUCKI, 2016).

Ao analisar os triângulos em um *software* dinâmico é possível identificar algumas características que são variantes, como as medidas dos lados e dos ângulos, e outras que são invariantes, como a quantidade de vértices e número de lados – ambos iguais a três.

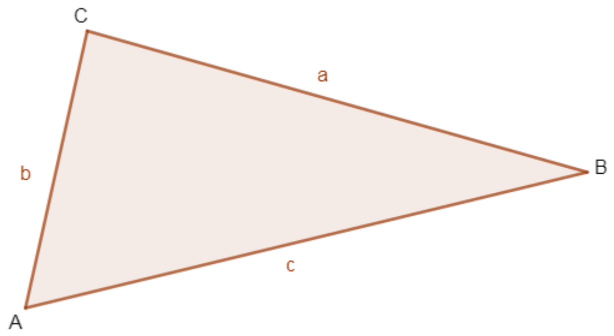
Segundo Neves (2014), a não existência de diagonais proporciona maior estabilidade para esta figura, pois três pontos não colineares definem um único plano. Dessa forma podemos ver sua representação sendo utilizada em construções e em estudos de outras figuras planas e espaciais.

Ao comparar diferentes triângulos, é possível observar que eles podem ser congruentes, semelhantes ou diferentes quanto às suas formas e medidas dos lados e ângulos. Mas algumas regularidades observadas permitem que ocorram classificações considerando seus elementos.

Sabemos que ao compararmos dois números, m e n, existem apenas três possibilidades: as duas serem iguais ou as duas serem diferentes e para o segundo caso temos que m pode ser menor que n ($m < n$) ou m pode ser maior que n ($m > n$) (LIMA, 2020). Assim, considerando os triângulos, podemos comparar as medidas dos lados entre si e as medidas dos ângulos.

Levando em consideração a medida dos lados do triângulo. Considere a, b e c as medidas dos lados do triângulo ABC, como vemos na Figura 2.

Figura 2: Triângulo qualquer



Fonte: elaboração da autora.

Para realizar esta comparação temos as seguintes possibilidades e classificações:

- Se a = b = c, ou seja, as três medidas iguais. E para este caso, o triângulo é denominado equilátero.
- Se a = b ≠ c, a = c ≠ b ou b = c ≠ a.

Ou seja, temos duas medidas de lados iguais e uma diferente das demais. Neste caso, o triângulo será denominado isósceles. E por último,

- Se a ≠ b ≠ c. Todos os lados possuem medidas diferentes, denominado escaleno.

Quanto à medida dos ângulos, ele pode ter 90°, denominado reto. Quando as medidas do ângulo forem menores do que 90º, o ângulo será denominado agudo e para todas as medidas que forem maiores do que 90º e menores do que 180º, os ângulos serão denominados de ângulo obtuso.

Vale lembrar que na Geometria Euclidiana a soma de todos os ângulos internos de um triângulo deve resultar 180°.

Baseado na classificação dos ângulos também se pode classificar os triângulos.

Assim, se em um triângulo todos os ângulos são agudos, então ele é chamado de triângulo acutângulo, se o triângulo possuir um ângulo reto ele é classificado como triângulo retângulo e se possuir um ângulo obtuso ele é um triângulo obtusângulo.

No caso do triângulo retângulo os lados recebem nomes especiais. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os demais são denominados catetos. Com base nesse tipo de triângulo, é desenvolvida uma teoria de estudo em que se busca relacionar as medidas dos lados e dos ângulos.

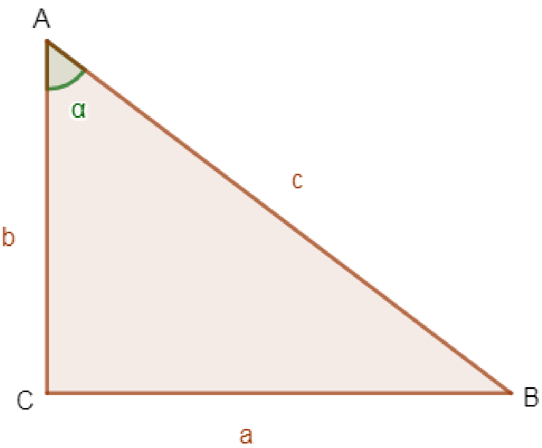
Comparando os lados do triângulo dois a dois temos as seguintes razões:

$$\frac{a}{b}; \frac{b}{a}; \frac{a}{c}; \frac{c}{a}; \frac{b}{c}; \frac{c}{b}.$$

Diante dessas comparações, sentiu-se necessidade de nomeá-las com nomes especiais pois elas podem ser vistas de quaisquer dos ângulos tomados como referência. Assim,

Tomando um dos ângulos agudos (Figura 3) de um triângulo retângulo podemos realizar essa comparação, lembrando que o lado oposto ao ângulo reto do triângulo é chamado de hipotenusa, os outros lados são chamados de cateto oposto quando estiver situado opostamente ao ângulo referenciado – escolhido, e cateto adjacente, aquele lado que juntamente com a hipotenusa forma o ângulo considerado.

Figura 3: Triângulo retângulo



Fonte: elaboração da autora.

De Iezzi, Dolce e Machado (2021), tomando como referência o ângulo α, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa é a razão $\frac{a}{c}$. A ela, denominamos seno de α, dizemos que sen (α) = $\frac{a}{c}$.

E ao inverter essa razão obtendo $\frac{c}{a}$, temos a razão inversa do seno de α, ou seja, cossecante de α, representada por cossec (α) = $\frac{c}{a}$.

Ao compararmos a medida do cateto adjacente ao ângulo α com a medida da hipotenusa encontramos uma razão que é denominada por cosseno de α, logo cos (α) = $\frac{b}{c}$.E o inverso dessa razão denomina-se secante de α, temos sec (α) = $\frac{c}{b}$.

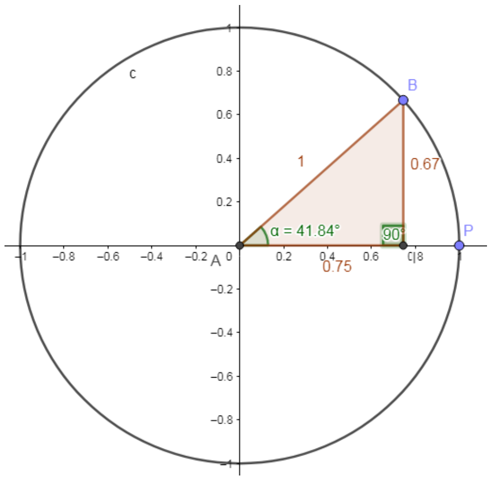
Se realizarmos a razão do cateto oposto pelo cateto adjacente temos a tangente de α e a sua razão inversa, a cotangente de α.

tg α = $\frac{a}{b}$ e cotg α = $\frac{b}{a}$.

As razões apresentadas acima entre os lados de um triângulo retângulo são chamadas de Razões Trigonométricas. Podemos observar os valores das Razões Trigonométricas, não só para ângulos agudos, mas para quaisquer ângulos entre 0° e 360° e seus múltiplos, através de uma relação entre os ângulos e arcos circulares no ciclo trigonométrico - uma circunferência C centrada em (0, 0) do plano cartesiano e com raio igual a 1u. (uma unidade de comprimento), orientada positivamente no sentido anti-horário e tendo como ponto de partida P de coordenadas (1, 0). Ou seja, P = (1, 0). (IEZZI, 2013).

Para os ângulos agudos estabelece-se uma relação direta entre eles e a circunferência utilizando a representação de um triângulo situado no 1° quadrante e considerando como hipotenusa o raio da circunferência e um dos catetos situado sobre o eixo das abscissas, como representado na Figura 4.

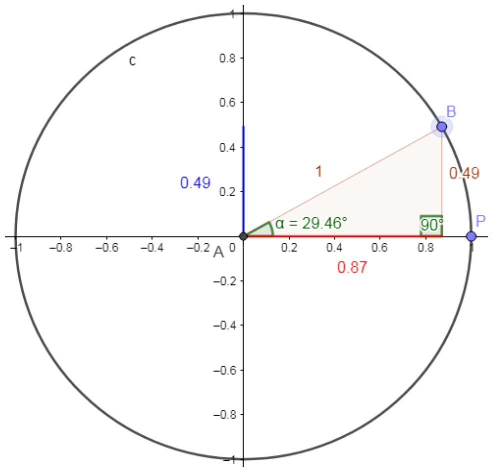
Figura 4: Triângulo retângulo no Ciclo Trigonométrico



Fonte: elaboração da autora.

Considerando o triângulo retângulo AIB (Figura 5) em que a hipotenusa é tomada como medindo 1 (uma) unidade de comprimento, as medidas dos catetos podem ser identificadas através das relações trigonométricas seno e cosseno em relação ao ângulo agudo α, de tal forma que as projeções deles sobre os eixos ortogonais x e y nos dá a medida de cada um respectivamente.

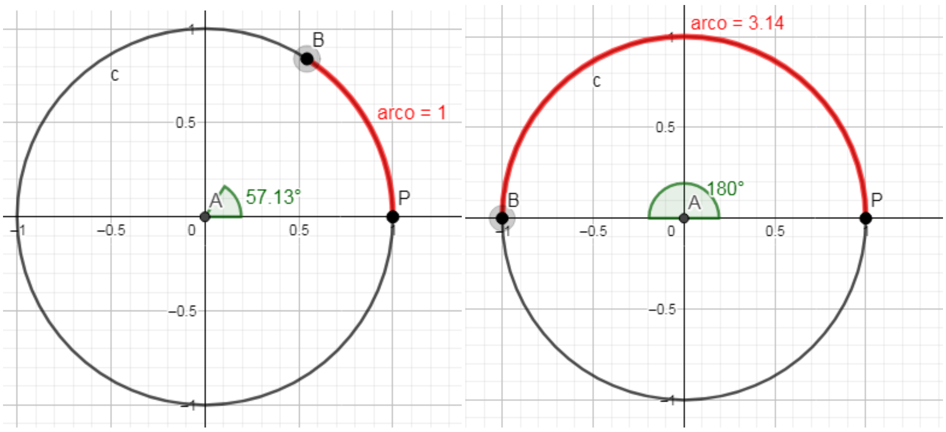
Figura 5: projeções dos catetos nos eixos



Fonte: elaboração da autora.

De forma geral, podemos fazer essa relação estabelecendo uma conexão entre o ângulo α e o arco formado PB, visto na Figura 5. Temos que cada ponto (B) ao se deslocar sobre a circunferência determina um arco circular formado por P, o centro da circunferência e B - arco PB (Figura 6).

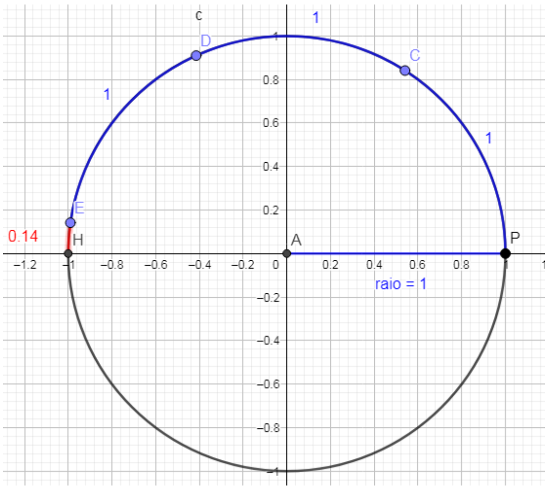
Figura 6: Relação arco e ângulo



Fonte: elaboração da autora.

A medida desse arco é dada em radianos, medida que pode ser entendida da seguinte forma: tomamos o comprimento do raio da circunferência, que em nosso caso é igual a 1, e ao sobrepor essa medida em uma semicircunferência encontramos que o raio cabe π vezes, sobre a circunferência. Veja a Figura 7. Fazendo o mesmo na outra parte do círculo temos que o raio cabe 2π vezes na circunferência.

Figura 7: Entendendo radiano



Fonte: elaboração da autora.

Como o raio cabe π vezes, em meia volta, dizemos que temos π radianos. Meia volta contempla um ângulo raso, ou seja, uma abertura de 180°. Para descobrir quanto vale qualquer arco em relação ao ângulo, basta pensarmos da seguinte forma: se para um ângulo sua medida angular é igual a 180° temos que a medida linear do arco igual a π radianos, para encontrar a medida linear de um ângulo de 45° devemos descobrir quanto vale cada 1º (um grau) e multiplicar pela quantidade de graus que queremos.

Ou, fazemos uma regra de três simples de forma diretamente proporcional como na Tabela 5. Se 180º corresponde a π radianos, então para 45º temos x radianos.

Tabela 5: Regra de três simples graus e radiano

Graus	Radianos
180	Π
45	X

Fonte: elaboração da autora.

Resolvendotemos:

$$\frac{180}{\pi} = \frac{45}{x}$$

$$180x = 45\pi$$

$$x = \frac{45\pi}{180}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

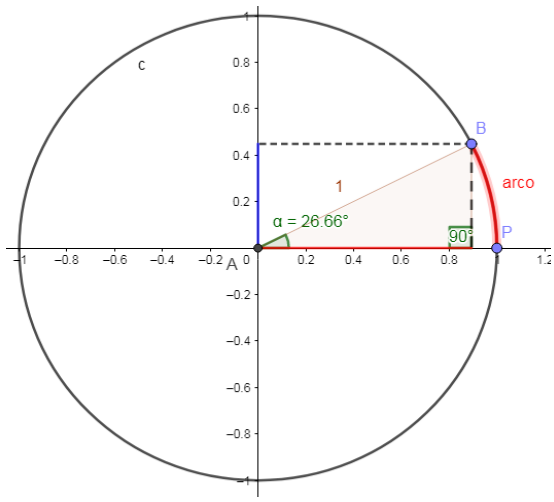
Assim, temos o valor de um ângulo expresso em graus associado ao comprimento do arco correspondente no ciclo trigonométrico.

Desta maneira, um arco circular possui uma relação com um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo dentro de uma circunferência, que por sua vez, relaciona-se com os lados através das razões trigonométricas que no caso de uma circunferência de raio igual a 1 é a projeção dos catetos no eixo.

Ao manipular e explorar a construção no GeoGebra, observamos a seguinte relação:

- a projeção do ponto B no eixo das abscissas é o ponto (sen (α), 0);
- a projeção de B no eixo das ordenadas é o ponto de coordenada (0, cos (α)).

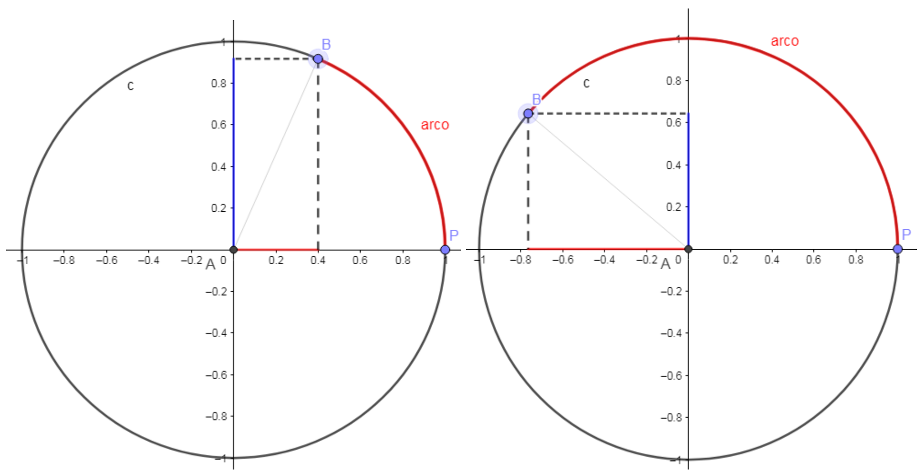
Figura 8: Projeções e Arcos



Fonte: elaboração da autora.

Sendo assim, seno e cosseno de α variam de acordo com o comprimento do arco PB, logo possuem uma relação funcional em relação ao arco PB.

Figura 9: Relação arco - segmento – projeção



Fonte: elaboração da autora.

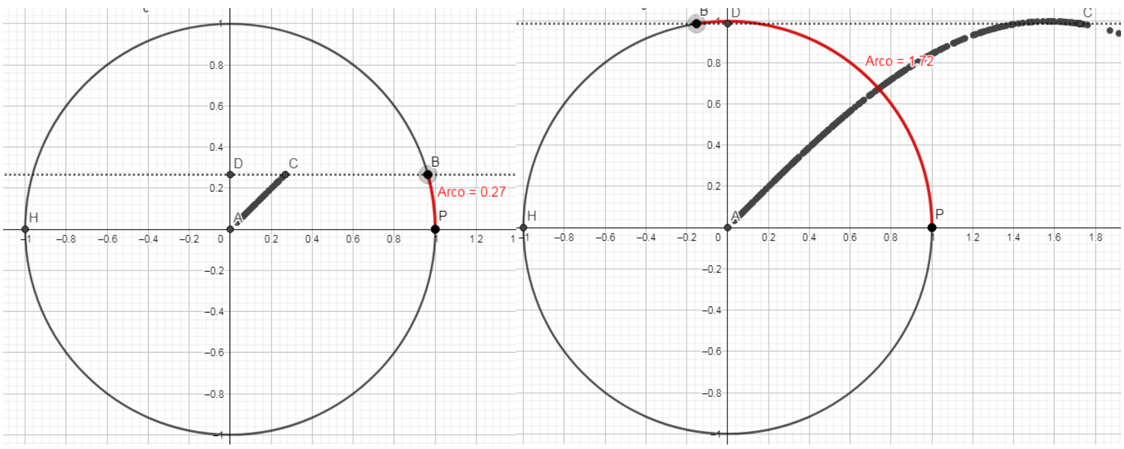
Através das relações encontradas, podemos observar algumas regularidades como, por exemplo, os valores de seno e cosseno variando de -1 a 1.

A relação que observamos no plano cartesiano, entre a medida de arcos circulares e as razões trigonométricas vistas no ciclo trigonométrico, pode ser representada no plano cartesiano como uma função real.

No caso do seno, temos o valor do arco na primeira coordenada e na segunda coordenada o valor da projeção do ponto B no eixo das ordenadas (o y de B), formando dessa maneira pontos de coordenadas C = (ComprimentodoArco, y(B)), dando origem a Figura 11.

Para cosseno, basta observar a projeção nos eixos das abscissas, teríamos o ponto D = (ComprimentodoArco, x(B)).

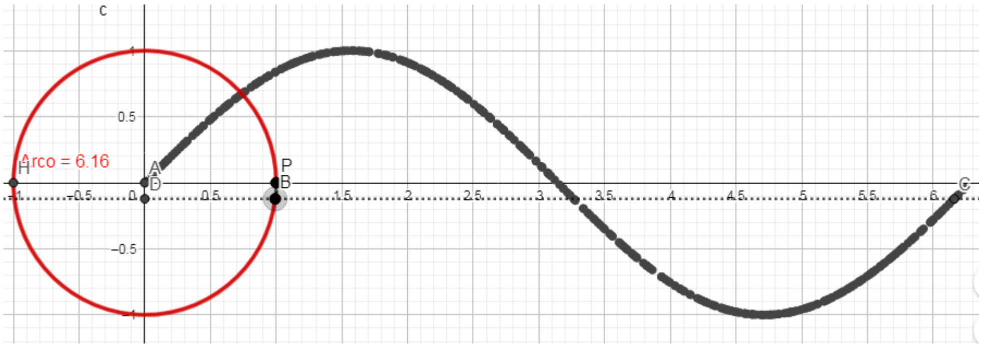
Figura 10: Criando seno no plano cartesiano



Fonte: elaboração da autora.

Na Figura 11, temos o rastro formado pelo ponto C ao realizar uma volta completa com o arco PB. A esse rastro chamamos de período, pois ao iniciar uma nova volta, os valores irão se repetir e consequentemente o rastro deixado será uma continuidade da curva repetindo o movimento já descrito anteriormente.

Figura 11: Um período é igual uma volta completa



Fonte: elaboração da autora.

Dessa maneira, encontramos infinitos arcos para os quais temos o mesmo valor de imagem. A relação entre arcos e uma razão trigonométrica representada no plano cartesiano culmina em uma função real, ou seja, de volta em volta teremos um período como visto na Figura 11.

Para cada *f(x)*, x sendo real, existe um *f*(x+p) onde *f(x)* = *f*(x+p), x é o comprimento de um arco e *f(x)* é uma relação trigonométrica. O valor de p é uma volta inteira, ou seja, no caso de seno e cosseno, um período de valor 2π. Podemos observar isso com mais clareza observando o comportamento da Função[3] seno de x.

Para compreender as Funções Trigonométricas é necessário ainda que entendamos o que venha a ser Função. O conteúdo de Funções é apresentado como sendo uma relação entre elementos de dois conjuntos, A e B, sendo que para todo elemento de Aestá associado a um único elemento de B. Esta associação pode ser expressa por uma regra ou lei de formação, que no nosso caso são as razões trigonométricas de um determinado ângulo.

Ao conjunto A, chamamos de domínio e o conjunto B de contradomínio, existe também um terceiro conjunto o qual denominamos de conjunto imagem (Im(*f*)) que consiste em um subconjunto de B, tal que para cada elemento de Im(*f*) existe algum elemento em A à ele associado. Para a função sem(x), o conjunto imagem é definido pelo intervalo real [-1, 1].

Quando trabalhamos com Funções Matemáticas na Educação Básica, a maior parte dos conjuntos são conjuntos numéricos, usualmente, denotamos uma função como: *f*: A → B, *y* = *f(x)*, sendo x a variável que representa os elementos de A, chamada de variável independente e *y* representa os elementos de B, chamada de variável dependente. Dizemos que y está em função de x, para todo *y* pertencente ao conjunto Im(*f*) (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

[3] Para o estudo de toda parte sobre funções utilizamos os livros:
Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções de Iezzi e Murakami (2013) e
Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria de Iezzi (2013).

A Função Seno é denotada da seguinte forma: *f*: R → R, y = sen(x), sendo x o comprimento de arco - variável independente, e y a relação trigonométrica seno - variável dependente.

Há diferentes maneiras de representar uma Função, podendo ser feito através de uma tabela, de um gráfico, de uma equação (normalmente chamamos de lei de formação), regra de associação ou através do diagrama de Venn.

Como uma introdução ao assuntodo conteúdo de funções, em livros didáticos, é comum a representação por tabela vir antes da representação gráfica. Em que em uma das colunas os valores representam elementos do domínio e na outra coluna os elementos da imagem da função.

Podemos obter informações sobre a função tanto através da tabela quanto através da representação gráfica. Considerando a Função *f*: R → R, *f(x)* = sen(x), x elemento do conjunto dos números reais. Observe a Tabela 6 para alguns pontos do primeiro período dessa função:

Tabela 6: Representação da Função Seno através de tabela

x	*f(x)* = sen(x)
0	0
π/6	½
π/3	√3/2
π/2	1
Π	0
3π/2	-1
2π	0

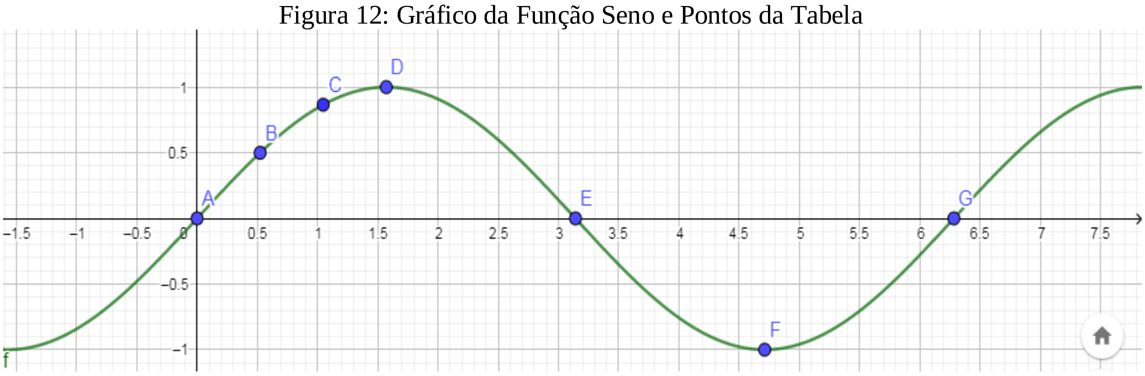
Fonte: elaboração da autora.

De acordo com Kindel, Oliveira e Costa (2021), podemos realizar a análise de uma função de acordo com sua representação em tabela comparando os valores entre as colunas da tabela, do domínio para a imagem e da imagem para o domínio. E comparando também os valores entre as linhas, ou seja, comparando os valores do domínio entre si e os da imagem entre si, realizando a comparação tanto no sentido de cima para baixo quanto de baixo para cima.

No caso da tabela 6, é possível verificar que na segunda coluna, de cima para baixo, os valores crescem até certo ponto e depois decrescem enquanto que na primeira coluna os valores são sempre crescentes. Ao comparar as colunas- domínio e imagem - percebemos que a imagem se repete para diferentes valores do domínio, assim podemos inferir que a função não é injetora.

Os pontos apresentados na Tabela 6 estão localizados sobre a curva, figura 12, (o gráfico) da função *f(x)* = sen(x), com domínio e contradomínio no conjunto dos números Reais. E a partir do gráfico também podemos analisar o que ocorre com essa função. Os pontos azuis em destaque são os valores dados na tabela 6.

Figura 12: Gráfico da Função Seno e Pontos da Tabela



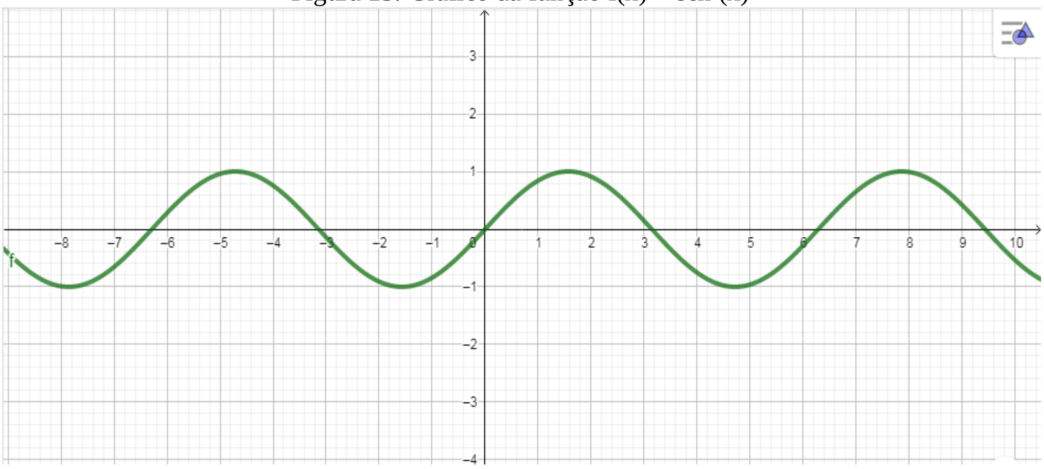
Fonte: elaboração da autora.

Ao comparar os valores de x e y podemos identificar o comportamento da função. Entretanto, quando se considera, como proposto por Kindel et al. (2021), o intervalo entre [-3, 3], os estudantes encontram valores próximos a zero e distintos dependendo da configuração de suas calculadoras, se programada para calcular em graus ou radianos. Com isso, saber identificar que valores precisam ser considerados para que possamos visualizar não só as projeções dos pontos sobre os eixos como também o comportamento da função é fundamental e no caso do intervalo real variando de -3 a 3, estes valores não nos dão o comportamento da função no intervalo de uma volta completa no círculo como também não são fáceis para se esboçar o gráfico com lápis e papel. Outro fator importante a ser considerado no estudo das funções trigonométricas é perceber que à medida que mudamos os valores de x para além de uma volta completa os valores de *f(x)* se repetem ciclicamente, determinando assim um intervalo limitado como sendo a imagem dela.

A mudança de alguns coeficientes da função nos permite perceber outras mudanças no gráfico, como o deslocamento vertical ou horizontal, a deformação (alongamento, achatamento das cristas), entre outros.

Ao manipularmos os coeficientes da Função Seno (Figura 13) no GeoGebra, podemos observar que mudanças ocorrem ao somarmos ou multiplicarmos uma constante real no domínio da função.

Figura 13: Gráfico da função f(x) = sen (x)

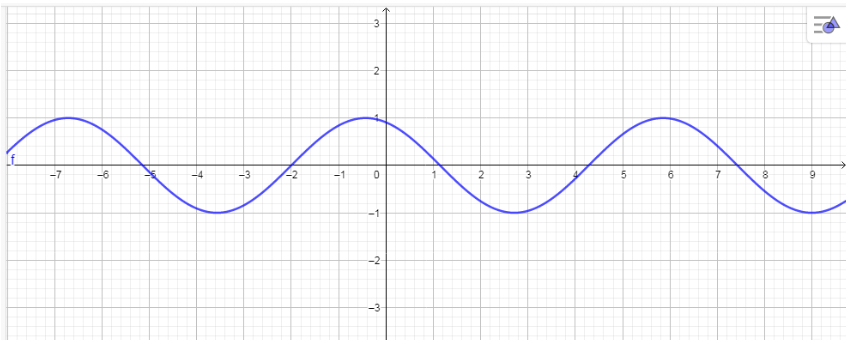


Fonte: elaboração da autora.

Na Figura 14, ao somar uma constante a variável x (domínio da função), ocorre uma translação horizontal – relacionada ao eixo x. Ou seja, dada a função g(x) = sen (x + π/2) = *f*(x+π/2), quando x = π/2, a imagem será equivalente a imagem de x = π/4 na função f(x) = sen (x).

Logo o elemento do domínio que possuiria imagem igual a 1, terá imagem igual a $\sqrt{2}/2$.Dessa forma, cada arco terá a imagem do arco após adicionar a constante.

Figura 14: Gráfico da função f(x + π/2) = sen (x+ π/2)

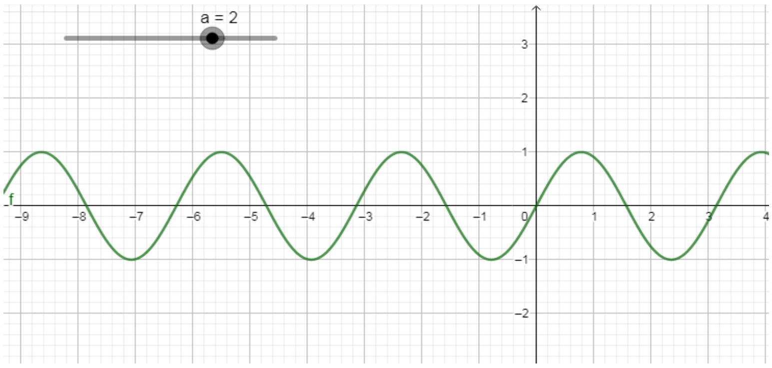


Fonte: elaboração da autora

Ao multiplicarmos uma constante real ao valor x obtendo a h(x) = sen(ax) = *f*(ax) temos quatro possibilidades:

1º) <u>se esse valor for positivo e maior que 1</u>, então os períodos encurtam (Figura 15), pois o arco em questão resulta em uma imagem equivalente, na *f(x)* = sen(x), a um arco maior. Tomando como referência o arco cujo valor é π/2, ao multiplicarmos por 2 ele terá relação com a imagem do arco com valor igual a π, pois h(π/2) = sen(2* π/2) = *f*(2*π/2).

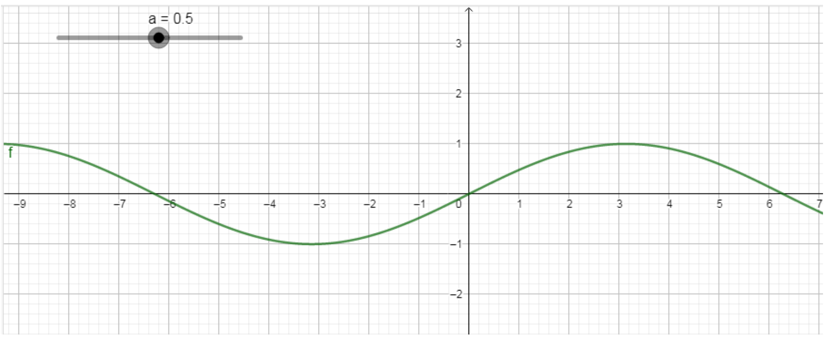
Figura 15: Gráfico da função seno multiplicando valores ao domínio. Caso 1.



Fonte: elaboração da autora.

2º) <u>se esse valor for positivo e estiver entre 0 e 1</u>, então os períodos alongam.Ainda considerando x = π/2, se multiplicarmos x por 1/2 temos h(π/2) = sen(1/2* π/2) = *f*(1/2* π/2). Os valores da imagem dos arcos assumem valores de arcos menores que a imagem anterior (Figura 16).

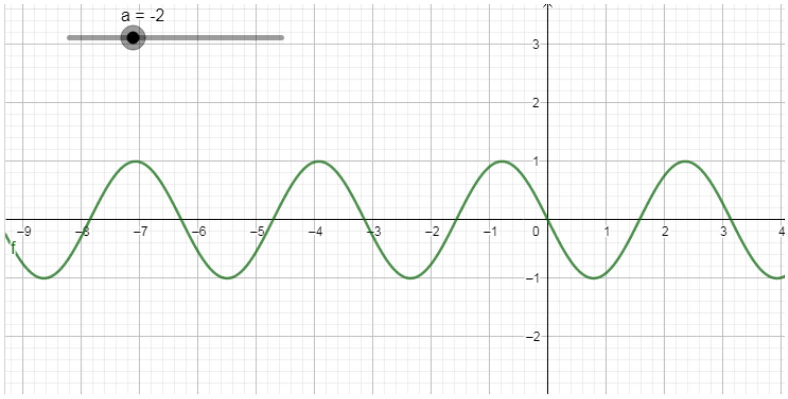
Figura 16: Gráfico da função seno multiplicando valores ao domínio. Caso 2.



Fonte: elaboração da autora.

3º) <u>se o valor for negativo e menor que -1</u>, os períodos encurtam como no primeiro caso, mas as imagens associadas a cada elemento do domínio têm seus sinais invertidos (Figura 17). Tomando como referência o arco cujo valor é π/2, ao multiplicarmos por -2 ele terá relação com a imagem do arco com valor igual a - π. Pois, h(π/2) = sen((-2)* π/2) = *f*((-2)*π/2).

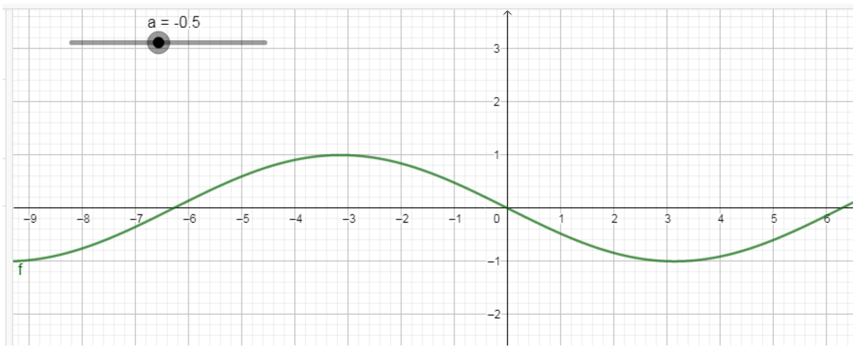
Figura 17: Gráfico da função seno multiplicando valores ao domínio. Caso 3.



Fonte: elaboração da autora.

4º) <u>se o valor for negativo entre -1 e 0</u>, os períodos alongam e as imagens associadas invertem seus sinais (Figura 18). Logo, considerando x = π/2, se multiplicarmos x por -1/2 temos h(π/2) = sen((-1/2)* π/2) = *f*((-1/2)* π/2).

Figura 18: Gráfico da função seno multiplicando valores ao domínio. Caso 4.

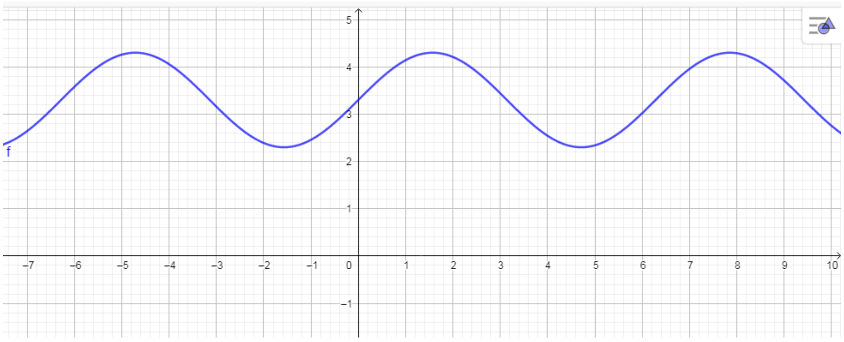


Fonte: elaboração da autora.

Quando observamos o gráfico após somar ou multiplicar uma constante na imagem da função, observamos de um ponto de vista diferente, pois o eixo que corresponde a imagem é o eixo y, mas as mudanças ocorridas são similares.

Ao somar um valor na imagem, ocorre uma translação vertical em seu gráfico (Figura 19), pois os valores das imagens estão representados no eixo y. Dessa forma, ao somar um número real, podemos ter uma imagem (associada a um valor do domínio) maior ou menor. Modificando também o valor mínimo e o máximo da função.

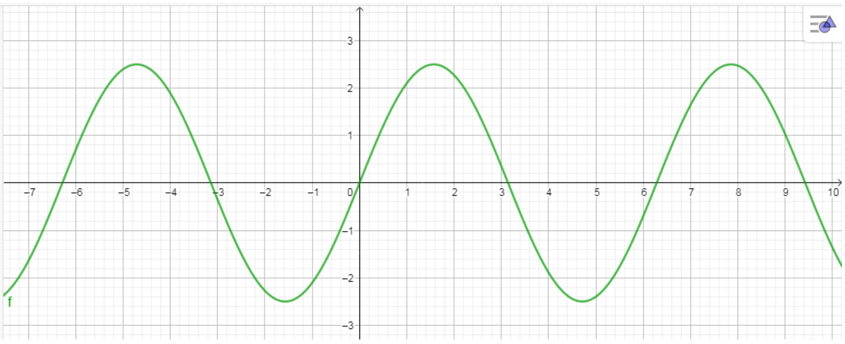
Figura 19:Gráfico da função f(x) + d =sen (x) + d



Fonte: elaboração da autora.

Já ao multiplicar, graficamente, ocorre algo bem parecido com o que ocorre no caso do domínio, de maneira diferente, pois a modificação ocorre na amplitude (quanto a função irá variar) da função e não no período (Figura 20). Ou seja, os valores das imagens possuem números de limitação diferentes de -1 e 1. Assim como podem não atingir o valor máximo e mínimo de 1 e -1, respectivamente.

Figura 20: Gráfico da função c*f(x) = c*sen (x)



Fonte: elaboração da autora.

Ao analisarmos uma função, podemos pensar na existência de uma função inversa a ela, ou seja, pensar na existência de uma função que associe os valores da imagem com os valores do domínio. Muitas vezes os termos função inversa e inversa da função podem ser entendidos, ou referenciados, como uma mesma ação matemática, e isso pode vir a acarretar erros e dúvidas quanto à sua significação no processo de aprendizagem matemática

Para a função seno, o termo inverso da função pode remeter, para alguns, a função que associa os arcos ao inverso da razão seno, ou seja, se temos a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa como seno, então o inverso dela será a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto, que é cossecante do ângulo considerado. Assim o inverso da função seria m(x) = cosec (x).

Já a função inversa a função seno será uma função em que os elementos da imagem são associados aos valores do domínio, no caso a função n(x) = arcsen(x).

Uma Função é uma transformação de elementos que se dá através de uma associação. Esta associação pode ser descrita por uma equação a qual chamamos de lei de formação. Essa lei de formação toma elementos do domínio e a eles associa elementos do contradomínio. Ao observar o contradomínio, caso a função seja bijetora, e associar a cada elemento deste conjunto um único elemento do domínio, diz-se que esta função é inversa da função dada.

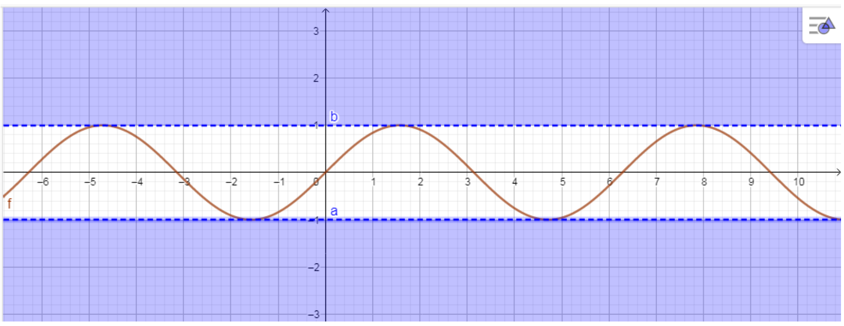
O conceito de função inversa envolve o procedimento, a operação que pega os elementos do conjunto imagem e busca retorná-los para o conjunto domínio. Para realizar essa ação, a função deve possuir como característica a bijetividade, ou seja, deve ser sobrejetora, tendo o conjunto imagem coincidente com o contradomínio, e injetora, com cada elemento da imagem possuindo apenas um elemento do domínio associado a ela.

A função seno, definida por *f*: R ⟶ R, tal que, *f(x)* = sen(x), para todo x ∈ R, não pode ser considerada uma função sobrejetora, pois o conjunto imagem está limitado a um intervalo de R. Dessa forma, o conjunto da imagem da função sen(x) não é igual ao seu contradomínio – os reais (conjunto ilimitado). Por essa razão, não seria possível obter uma função inversa de seno visto que o contradomínio se tornaria domínio e como, pela definição de função, todos os elementos do domínio devem se associar a um único elemento do contradomínio e neste caso cada elemento do domínio estaria associado à vários.

Porém, podemos realizar modificações no contradomínio da função seno para que ela possa ser considerada sobrejetora, ou seja, o conjunto imagem ser igual ao contradomínio, como a função seno de x possui imagens entre -1 e 1 basta restringir o conjunto do contradomínio para o intervalo real [-1, 1], como representado na Figura 21. Definindo f: R ⟶ [-1,1], *f(x)* = sen(x), x ∈R.

Isto é, desconsideramos os valores de y maiores que 1 e menores que -1, dessa maneira a função passa a ser considerada uma função sobrejetora.

Figura 21: Gráfico da função f(x) = sen(x) com restrição no contradomínio.

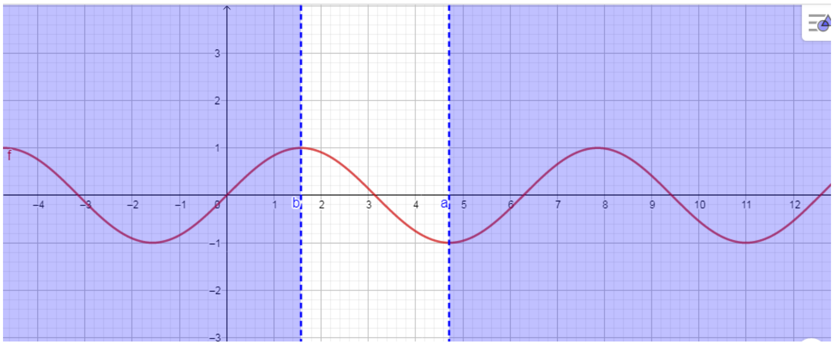


Fonte: elaboração da autora.

Sabendo que a função seno possui períodos, encontramos infinitos valores do domínio que possuem a mesma imagem, logo essa função não é injetora. Mas podemos fazer uma restrição para que a função seja injetora, se para ter uma função sobrejetora restringimos o contradomínio, para termos uma função injetora devemos limitar o domínio. Desta forma é possível conseguirmos infinitos intervalos em que a função sen (x) seja injetora e escolhe-se uma delas.

Observe que se delimitarmos a função apenas no intervalo [π/2, 3π/2], o que pode ser observado na Figura 22, ou seja, desconsideramos valores igual e menores que π/2, e valores igual e maiores que 3π/2, no domínio. Temos *f*: [π/2, 3π/2] → R, *f(x)* = sen (x), x ∈ R.

Figura 22: Gráfico da função f(x) = sen(x) com restrição no domínio.



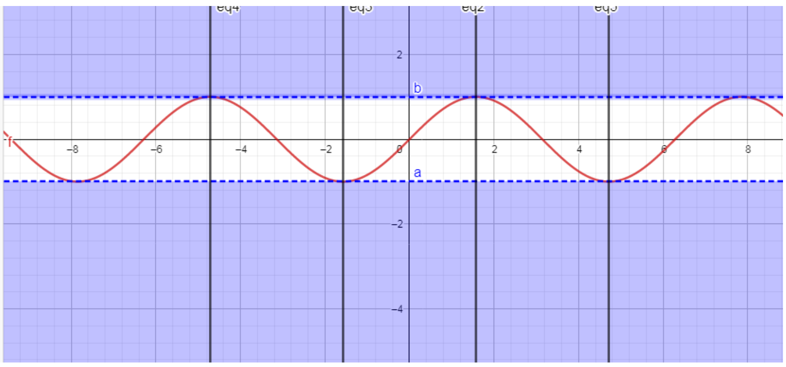
Fonte: elaboração da autora.

Isso ocorre para todos os intervalos [π/2 + kπ, π/2 + (k+1)π], k ∈ Z.

Tendo em vista que conseguimos tornar a função *f(x)* = sen(x) sobrejetora e injetora, podemos defini-la de forma que ela seja bijetora em infinitos intervalos.

f: [π/2 + kπ, π/2 + (k+1)π]→ [-1,1], *f(x)* = sen(x) com k ∈ Z.

Figura 23: Intervalos de funções sen(x) bijetores



Fonte: elaboração da autora.

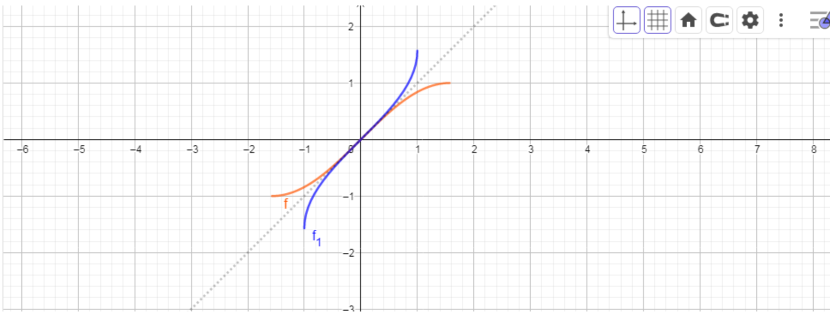
Um fator relevante para fazer a escolha do intervalo que irá determinar o domínio para o qual a função é inversível é analisar o crescimento e decrescimento da função, uma função pode ser crescente ou decrescente. Ela é considerada função crescente se os valores de *y* aumentam quando os valores de x aumentam também e é decrescente se os valores de y diminuem conforme os valores de x aumentem.

No caso da função seno não podemos dizer que esta função é estritamente crescente ou decrescente, pois o sinal de sua imagem varia infinitamente e indistintamente em função do intervalo considerado. Ou seja, escolhendo como período, o intervalo [0, 2π], temos os intervalos [0, π/2] e [3π/2, 2π] em que a função seno é crescente, e nos intervalos [π/2, π] e]π, 3π/2[ela é decrescente. Isso valerá para qualquer período, pois sempre é possível encontrar quatro intervalos contidos nele de tal forma que apareçam partes em que a função é crescente e parte em que ela é decrescente.

Dessa forma, conseguimos intervalos em que a função é sobrejetora e injetora, e, portanto, é uma função bijetora. Com isso, pode-se definir a função inversa da função seno.

Logo, restringindo o domínio e o contradomínio da função nos intervalos f: [-π/2, π/2] → [-1,1], conseguimos determinar a função inversade forma a que ela leve os pontos da imagem no domínio. Ou seja, sendo definida de [-1,1] → [-π/2, π/2], como mostra a Figura 24.

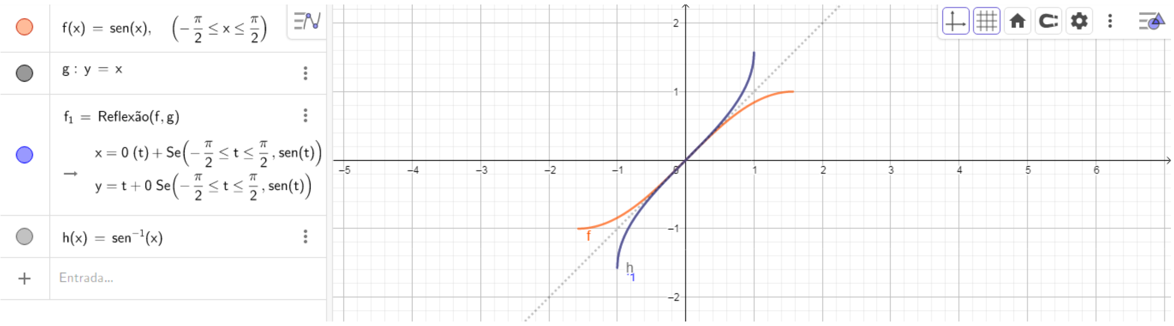
Figura 24: Gráfico sen (x), x ∈ [-π /2, π /2] e reflexão axial



Fonte: elaboração da autora.

Observe que a função n(x) = arcsen(x), ou t(x) = sen^{-1}(x), coincide com a reflexão de *f(x)* = sen(x) em relação à reta y = x (Figura 25). Podemos dizer que a função inversa "troca" a ordem das coordenadas dos pontos da função através de uma reflexão axial – dessa forma (a, b) possui relação com (b, a).

Figura 25: Gráfico da função f(x) = sen (x), x ∈ [-π /2, π /2], reflexão axial de sen (x) e n(x) = arcsen(x)

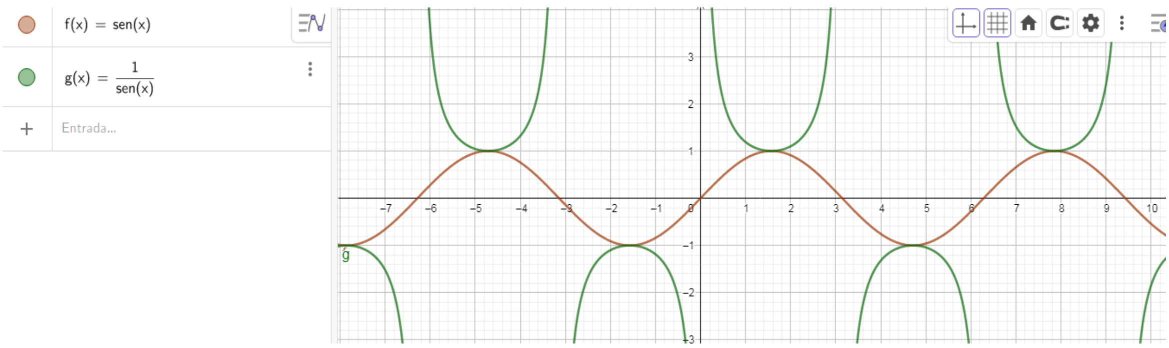


Fonte: elaboração da autora.

Já a inversa da função tem relação com a característica própria de elementos de um corpo algébrico, ou seja, o inverso multiplicativo da imagem dessa função. Quando dizemos inverso de**,** neste estudo, estamos nos referindo ao inverso multiplicativo, assim, o inverso da razão seno é a razão cossecante, de imediato, a inversa da função seno é a função cossecante.

Ao multiplicarmos a f(x) e m(x) temos como resultado a função constante y = 1. Dessa forma a inversa da função f(x) = sen(x) é m(x) = 1/sen(x) (Figura 26) que é a função cossecante de x.

Figura 26: Graficos das funções f(x) = sen(x) e m(x) = 1/sen(x)



Fonte: elaboração da autora.

Levando em conta o que foi observado nesse estudo, observamos que a realização de análises de gráficos usando tecnologias e os conceitos trigonométricos nos permitem perceber melhor as definições que nos foram e são apresentadas aos estudantes do Ensino Médio. Diante do exposto, consideramos que seja possível realizar o diálogo entre a visualização gráfica, análise de tabelas e conceitos sobre trigonometria e função de maneira que esse estudo possa se tornar potencialmente significativo para os estudantes lhes oferecendo a oportunidade de testar, modificar, observar e validar suposições.

No próximo capítulo, apresentamos a trajetória e os caminhos metodológicos percorridos da pesquisa.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos o caminho que foi percorrido para a realização dessa pesquisa, três momentos são importantes para compreender este processo: o planejamento, a aplicação e a análise.

O primeiro momento consistiu no planejamento, nele realizamos o levantamento bibliográfico a fim de identificar o que e como tem sido desenvolvidas pesquisas sobre funções trigonométricas; fizemos um estudo do conteúdo matemático de Funções Trigonométricas, idealizamos as tarefas e buscamos teorias para analisá-las.

No segundo momento, aplicamos as tarefas para grupos de licenciandos de matemática de um curso noturno e, em nossa pesquisa, o terceiro momento ocorreu de forma simultânea ao segundo. Pois, analisamos os dados obtidos a cada encontro e durante a análise surgiram novos pontos a serem pesquisados e ocorreram modificações nas tarefas idealizadas e elaboramos novas a serem aplicadas.

A metodologia escolhida para nos orientar durante o desenvolvimento deste trabalho foi a DBR (Design Based Research), ou seja, Pesquisa Baseada em Design. Pesquisa esta que, apesar de ser uma metodologia considerada recente, quando comparada com as outras, possui características que se aproximam do que buscamos no desenvolvimento da pesquisa em questão.

Gravemeijer e Cobb (2013) apresentam esta metodologia como uma inovação curricular, e, discutem o design como dando apoio para professores auxiliarem seus alunos em atividades de aprendizagem matemática. De maneira clássica podemos definir a Pesquisa de Design como:

> Uma série de procedimentos de investigação aplicados para o desenvolvimento de teorias, artefatos e práticas pedagógicas que sejam de potencial aplicação e utilidade em processos ensino-aprendizagem existentes (BARAB; SQUIRE, 2004 apud MATTA et al, 2014).

Ela deve possuir um tema bem amarrado, diferenciando-a da pesquisa-ação, porém não segue uma estrutura de passos bem definidos. Em nossa pesquisa, escolhemos como tema o conteúdo de Funções Trigonométricas.

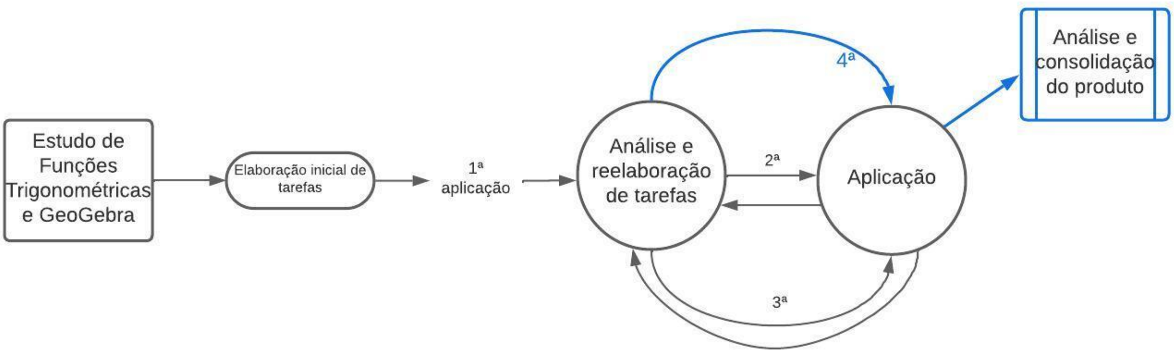
Também é uma característica do Design a interatividade. Os participantes (alunos e professores) interagem entre si discutindo, conjecturando, refutando e compartilhando deduções, podem ainda desenvolver novas conjecturas a serem testadas durante o desenvolvimento da atividade proposta, em prol da construção de um conhecimento cooperativo. Além disso, o design preocupa-se com o ambiente local, ou seja, as pesquisas desenvolvidas são, comumente, desenvolvidas no cotidiano dos participantes (MATTA, SILVA, BOAVENTURA, 2014).

São cinco as características dessa metodologia listadas em Matta, Silva e Boaventura (2014). A DBR é teoricamente orientada, intervencionista, colaborativa, fundamentalmente responsiva e interacionista. Vamos entender como nossa pesquisa se encaixa em cada uma dessas propriedades.

A DBR é considerada teoricamente orientada, pois toda a abordagem do design parte de uma teoria sólida, que nosso caso consiste no estudo das Funções Trigonométricas, bem como sobre os tópicos necessários para entendê-lo e numa revisão bibliográfica em que buscamos identificar os caminhos percorridos pelas pesquisas nos últimos anos. Depois de trabalhada, gera uma teoria que pode ser melhorada conforme ocorrem aplicações, já que o design se dá através de sucessivas aplicações tornando-a iterativa, voltada para soluções práticas e não objetivando um fim.

Em nossa pesquisa, tivemos a oportunidade de aplicar tarefas sobre Funções Trigonométricas utilizando Tecnologias Digitais em quatro momentos diferentes e após o término de cada uma das aplicações, as analisamos e as aplicamos novamente, gerando assim um ciclo.

Figura 27: Esquema das aplicações



Fonte: elaboração da autora.

Essa também é fundamentalmente responsiva, dado que é moldada pelo diálogo entre os participantes, os conhecimentos teóricos e suas interpretações. O conhecimento é construído com base na prática e nas intervenções, uma vez que todos os envolvidos no processo de pesquisa são considerados importantes, o problema de pesquisa é resolvido com a colaboração de todos. Há uma parceria entre comunidade de prática e os pesquisadores, fazendo com que também seja colaborativa.

A pesquisa de design é considerada intervencionista porque possui um resultado, uma produção de algo para a prática pedagógica. Um diálogo entre o contexto na qual ela foi desenvolvida (podendo ser ministrado cursos, ou palestras ao final da pesquisa, para os participantes e colaboradores envolvidos). Nesta pesquisa, o resultado culminará em um caderno composto por atividades sobre o estudo de Funções Trigonométricas para futuros professores e professores de matemática, podendo ser aplicada em atividades com alunos do Ensino Médio.

De maneira sumária,

> A DBR utiliza teorias, descobertas empíricas, sabedoria e conhecimento colaborativo comunitário e popular, inspiração e experiências como fontes para criar intervenções e soluções de problemas concretos, ou seja, para conduzir uma pesquisa aplicada que dialogando com as dificuldades e os sujeitos engajados nestas, conduz iterativamente a construção contínua da solução mais adequada (MATTA et al, 2014, p.5).

Outras pesquisas estão sendo desenvolvidas utilizando a pesquisa baseada em design como metodologia.

Kindel (2012) faz uso do Design para desenvolver uma pesquisa cujo objetivo consiste em analisar a noção de infinito de licenciandos de Matemática, seu estudo foi dividido em três ciclos: levantamento bibliográfico e elaboração de tarefas; curso de extensão 1 e 2 - ocorridos no ambiente virtual de aprendizagem VMT.

Silva (2019) apresenta uma pesquisa em que o campo foi realizado com alunos do 9° ano Ensino Fundamental, em que busca investigar e analisar os procedimentos utilizados pelos estudantes enquanto discutem situações envolvendo a noção dos números irracionais πeΦ.Assim sendo, apresentaremos agora os participantes e local de pesquisa.

Ao examinarmos os dois exemplos citados buscamos identificar alguns pontos que também pudessem nos apoiar para a realização desta pesquisa para além dos aspectos teóricos levantados por Gravemeijer e Cobb (2013) e Matta (2014) e apresentamos a seguir os participantes e o local de realização da pesquisa.

4.1. Participantes e Local

Como participantes, escolhemos licenciandos do curso de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) do campus de Nova Iguaçu.

Devido à pandemia do Coronavírus, as três primeiras interações com os participantes ocorreram de forma totalmente remota, fazendo uso de variadas plataformas de aprendizagem.

Assim, como local de pesquisa são, além da UFRRJ alguns Ambientes Virtuais - Google Meet, GeoGebraClassroom e Virtual Math Team (VMTcG).

O Google Meet consiste em uma plataforma que permite o contato de pessoas através de áudio e vídeos. O GeoGebraClassroom é uma plataforma em que é possível criar salas virtuais, onde pode-se criar tarefas com o GeoGebra e acompanhar em tempo real as atividades dos alunos individualmente. O VMTcG é uma plataforma criada para a pesquisa em Educação Matemática, onde é possível que participantes se comuniquem através de um chat e que juntos construam objetos matemáticos no GeoGebra.

Para compreender um pouco mais sobre o motivo das aplicações online, precisamos nos atentar a algumas informações sobre o Coronavírus e o Ensino Remoto.

4.2. Coronavírus e Ensino Remoto

A Covid-19 teve seu primeiro caso confirmado no Brasil no dia 26 de fevereiro. Tanto as escolas, públicas e particulares, quanto as universidades tiveram que tomar decisões para continuar os estudos e as aulas, optando inicialmente por suspender as aulas.

Na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro algumas deliberações[4]determinaram como ocorreriam as aulas nesse cenário. Foi criado um Comitê de Trabalho sobre o novo coronavírus que é formado pelos membros da Secretaria da Reitoria, Progep/CASST, Prefeitura Universitária/Divisão de Saúde, Direções de campus, Pró-reitora de Graduação e Pró-Reitora de Assuntos Estudantis, e do Departamento de Epidemiologia e Saúde Pública do Instituto de Veterinária.

O primeiro comunicado feito pela universidade foi no dia 12 de março de 2020, em que foram suspensas a realização do concurso para Técnico Administrativo da UFRRJ. O mesmo comunicado pôs em quarentena - de 14 dias, discentes, docentes, técnicos e trabalhadores terceirizados. Nesse momento não era recomendação do Ministério da Educação a suspensão de aulas e /ou realização de trabalho remoto. Entretanto, as aulas ficaram suspensas por um longo período, e no dia 4 de agosto através do site da universidade, foi divulgado que o Conselho Universitário (Consu) aprovou as normativas para os Estudos Continuados Emergenciais.

Nessa normativa ficou aprovado que as aulas seriam síncronas através das plataformas RNP e Jitsi e assíncronas nas plataformas AVA do SIGAA. As atividades síncronas deveriam computar cerca de 25 a 50% da carga horária total da disciplina, devendo ser completada por

[4]Medida Provisória nº 934, de 1º de abril de 2020; Deliberação nº 28, de 14 de maio de 2020; Deliberação nº 33, de 15 de maio de 2020; Deliberação nº 78 , 10 de julho de 2020.

atividades assíncronas. Bem como atividades extracurriculares como palestras e cursos de extensão por meio de plataformas digitais.

Dada a longevidade que a pandemia atingiu, ocorreu o Ensino Remoto que

> [...] envolve o uso de soluções de ensino e produção de atividades totalmente remotas, como, por exemplo, a produção de videoaulas que podem ser transmitidas por televisão ou pela Internet. [...] O objetivo principal nessas circunstâncias não é recriar um novo modelo educacional, mas fornecer acesso temporário aos conteúdos e apoios educacionais de uma maneira a minimizar os efeitos do isolamento social nesse processo (JOYE; MOREIRA; ROCHA, 2020, p. 13).

Durante anos autores abordam temáticas que envolvem o uso de tecnologias informáticas nos processos cognitivos, estudos dessa área apontam a necessidade e benefícios de inserir tecnologias na aprendizagem de matemática (BAIRRAL, 2017, 2019; BORBA, 2014). Porém, algumas dificuldades são relatadas, como a falta de preparação na formação do professor e a escassez de recursos tecnológicos, tanto por parte dos professores quanto por parte dos alunos.

Dessa forma, justificamos a necessidade de desenvolver parte da pesquisa apenas em Ambientes Virtuais sem intervenções presenciais além do que já era previsto, como o levantamento realizado no Catálogo de Tese e Dissertações da Capes e o estudo sobre Funções Trigonométricas.

Apresentamos a seguir como ocorreram a coleta de dados, que recursos utilizamos e como realizamos as análises de dados da pesquisa.

4.3. Coleta de Dados

Para a coleta de dados utilizamos um questionário semiaberto (APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO I), respostas escritas das atividades realizadas pelos participantes e anotações do diário de campo da pesquisadora.

Em busca de compreender as ideias iniciais dos licenciandos sobre os conceitos abordados nessa pesquisa utilizamos o Google Forms para elaborarmos o Questionário I de sondagem e o compartilhamos para preenchimento pelo aplicativo WhatsApp. O questionário foi dividido em três partes considerando os seguintes aspectos: Dados gerais; Caracterização dos participantes e Levantamento sobre suas concepções acerca das Funções trigonométricas, como pode ser observado na Figura 28.

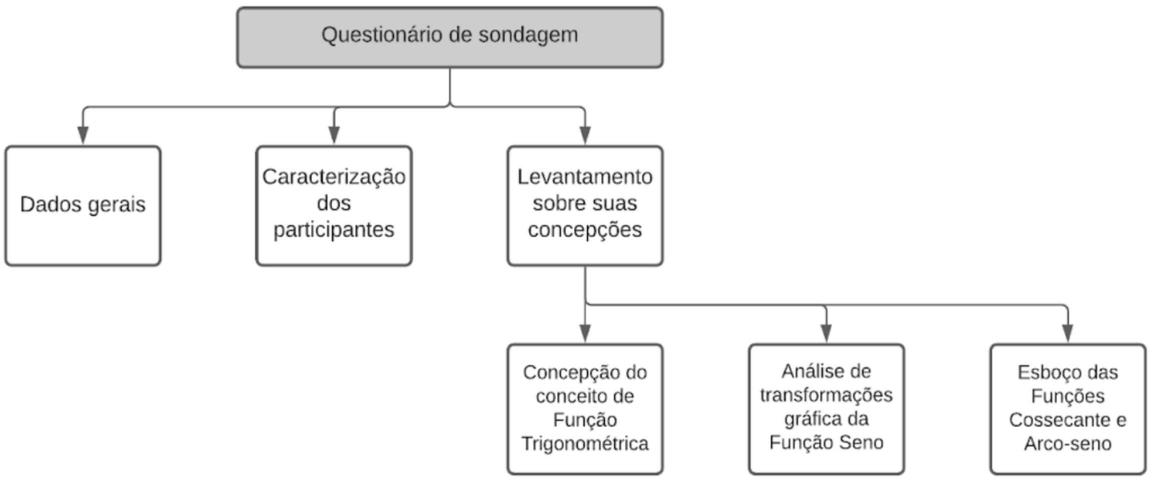
Como dados gerais as perguntas buscaram mais informações para contatos futuros e questões internas sobre a pesquisa como email, telefone, disposição para participar da pesquisa e apelido para identificação no decorrer das atividades.

Sobre a caracterização estudantil e profissional dos participantes buscamos informações acerca de sua situação no curso, como período, e se possuíam experiência profissional e/ou se já trabalhavam como professor em algum estabelecimento de ensino e qual o nível escolar de atuação.

No último aspecto, objetivamos perceber como os licenciandos compreendiam e percebiam tanto o conceito, quanto as representações de funções trigonométricas. No levantamento sobre suas concepções, dividimos em três partes: Concepção do conceito de Função Trigonométrica, Análise de transformações gráficas da Função Seno e Esboço das Funções trigonométricas Cossecante e Arco-seno.

Após a aplicação do Questionário I, algumas questões não estavam claras para nós, isso deu origem ao Questionário II que possui o objetivo de aprofundar que ideias os licenciados possuem sobre funções trigonométricas.

Figura 28: Esquema do Questionário I



Fonte: Fonte: elaboração da autora.

O diário de campo consiste em um documento no qual registrei de forma escrita observações sobre comportamentos, respostas e maneiras como os integrantes da pesquisa se comportam diante das tarefas propostas, ele apresenta também outros tipos de anotações como tempo de duração dos encontros, local e número de participantes, bem como pensamentos e ideias que surgiram no decorrer da pesquisa.

Utilizamos também a gravação de áudios pelo aplicativo WhatsApp para registrar as ideias eminentes das pesquisadoras em diferentes momentos. Dessa forma, cabe pensar em como foram coletados os dados, que recursos utilizamos, que apresentamos a seguir.

4.4. Recursos

Como recursos para coletar dados, utilizamos algumas ferramentas para a realização das tarefas fazendo uso de esquadros, transferidor, régua, lápis, papel, borracha, computador e computador com acesso à internet, pois dado o momento de Ensino Remoto vivenciado durante a pandemia, a internet foi essencial para a existência da pesquisa. Em interações entre os participantes que ocorreram em Ambientes Virtuais utilizamos o Google Meet, o GeoGebraClassroom e o VMTcG,

Os esquadros, transferidor, régua, lápis, papel e borracha são objetos utilizados em ambiente escolar nas aulas de matemática, sendo que os dois primeiros são menos utilizados. Os esquadros consistem em um par de réguas que possuem o formato de triângulos retângulos, é comumente utilizado para traçar retas paralelas e perpendiculares. Já o transferidor, é utilizado para medir ângulos.

No Ambiente Virtual, utilizamos três espaços que podem ser usados como recursos para que as interações ocorram e para registrar o diálogo e as respostas às atividades. O Google Meet nos permite a comunicação oral, visual e escrita, o GeoGebraClassroom possibilita a resposta escrita dos participantes e manipulação de construções no GeoGebra, assim como no VMTcG que além de possuir o GeoGebra, permite a comunicação em tempo real, através do chat.

O WhatsApp também teve importância na pesquisa, pois com o uso dele mantínhamos uma comunicação mais frequente, além de utilizá-lo também para alguns debates sobre temas propostos e registros de pensamentos da pesquisadora.

4.5. Tarefas

As tarefas foram planejadas pensando em uma linha de conceitos que julgamos necessários para compreensão das Funções Trigonométricas considerando, ou seja, as tarefas a serem desenvolvidas com os licenciandos abordam os pré-requisitos para o estudo de Funções Trigonométricas, bem como os seus conceitos.

No Quadro 2, apresentamos a primeira versão da sequência de tarefas elaboradas para serem trabalhadas com os licenciandos. Apresentamos o nome, o objetivo e a duração prevista de cada tarefa. A duração para cada tarefa foi determinada considerando o tempo de construção e o tempo considerado necessário, pelas pesquisadoras, para discussão e conjecturas em cada uma delas.

Quadro 2: Tarefas planejadas antes das intervenções com licenciandos

Tarefa	Nome da Atividade	Objetivos	Duração planejada

1	Arrasando nas razões	• Compreender o par de esquadro como um objeto de aprendizagem para Razões Trigonométricas.	1 hora e 40 minutos
2	Ambientação no GeoGebraClassroom	• Ambientar os licenciandos a plataforma GeoGebraClassroom; • Perceber transformações gráficas de Funções Afins e Quadráticas; (momento 1) • Construir formas geométricas em ambiente virtual. (momento 2)	1 hora e 40 minutos
3	Ambientação no VMT	• Ambientar os participantes ao site. • Perceber a definição de quadrado.	40 minutos
4	Estudando a seno	• Manipular a Função Seno e discutir transformações gráficas a partir da variação de coeficientes.	50 minutos
5	Explorando: Seno e Arco Seno; Seno e Cossecante.	• Compreender como encontrar a função inversa; • E analisar a relação da Função Seno com a Função Cossecante.	1 hora e 40 minutos

Fonte: elaboração da autora.

Com base em uma conversa inicial e informal com o primeiro grupo sobre o tema de pesquisa para saber como eles e elas pensavam sobre o tema, percebemos que era necessária a elaboração de um questionário para orientar melhor as questões visto que nesta conversa as suas respostas eram vagas ou confusas ou ainda não conseguíamos entender o que queriam dizer. Diante do exposto, pelas muitas dúvidas que tínhamos sobre como eles entendiam as Funções Trigonométricas, para caracterizar melhor o público e aprofundar algumas questões que consideramos ser importante tanto para conhecê-los melhor quanto para preparar as tarefas.

Assim, o questionário foi dividido em duas partes: caracterização estudantil e profissional; concepções sobre alguns conceitos envolvendo funções trigonométricas.

As perguntas caracterizadas como dados gerais almejavam informações para contatos futuros e questionamentos sobre acessibilidade. Havia também questões sobre a caracterização estudantil e profissional dos participantes queríamos entender situações no curso, tais como: período, participação em diferentes tipos de estágio e por fim, se possuíam experiência profissional.

No levantamento das concepções, buscamos elaborar perguntas sobre o tema a ser abordado na pesquisa, tais como: o que entendiam por Funções Trigonométricas e quais conceitos consideram pré-requisitos para o seu aprendizado. Assim como quais suas percepções sobre as transformações gráficas e esboço de funções.

Com base nesse questionário e em uma análise descritiva do mesmo, notamos que novas tarefas deveriam ser preparadas para discutirmos algumas questões que surgiram de modo confuso em suas respostas. Dando origem a mais quatro tarefas, totalizando 10, incluindo o questionário.

No Quadro 3, apresentamos o planejamento das ações considerando como ponto de partida o questionário.

Quadro 3**:** Tarefas planejadas após 1º contato com licenciandos

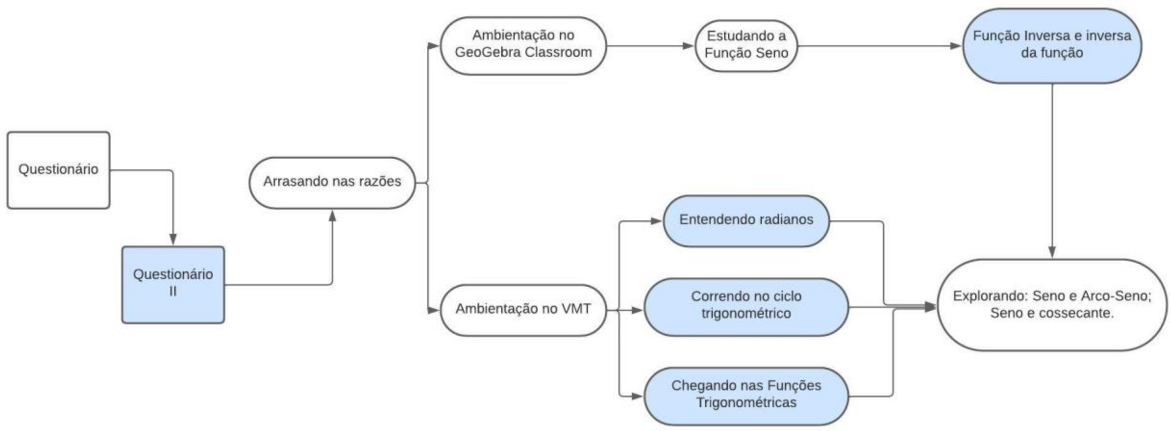
Tarefa	Nome da Atividade	Objetivos	Duração planejada
0	Questionário de sondagem	• Caracterizar os participantes; • Observar que concepções sobre funções trigonométricas são apresentadas pelos licenciandos	30 minutos
1	Arrasando nas razões	• Compreender o par de esquadro como um objeto de aprendizagem para Razões Trigonométricas.	1 hora e 40 minutos
2	Ambientação no GeoGebraClassroom	• Ambientar os licenciandos a plataforma GeoGebraClassroom; • Perceber transformações gráficas de Funções Afins e Quadráticas; (momento 1) • Construir formas geométricas em ambiente virtual. (momento 2)	1 hora e 40 minutos
3	Ambientação no VMT	• Ambientar os participantes ao site. • Perceber a definição de quadrado.	40 minutos
4	Entendendo radianos	• Compreender a relação entre as medidas grau e radiano.	50 minutos
5	Correndo no ciclo trigonométrico	• Observar relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.	30 minutos
6	Chegando nas Funções Trigonométricas	• Relacionar o ciclo trigonométrico e as Funções Trigonométricas.	50 minutos
7	Estudando a seno	• Manipular a Função Seno e discutir mudanças gráficas a partir da variação de parâmetros.	50 minutos
8	Função inversa e Inversa da função	• Discutir se função inversa e inversa da função representam o mesmo conceito.	50 minutos
9	Explorando: Seno e Arco Seno; Seno e Cossecante.	• Compreender como encontrar a função inversa; • E analisar a relação da Função Seno com a Função Cossecante.	1 hora e 40 minutos

Fonte: elaboração da autora.

Com base neste planejamento fomos a campo em outro momento, agora presencialmente e com a previsão de duração dez encontros para realização das tarefas. Para tanto, também estava previsto um tempo para a discussão sobre cada uma das tarefas com todos os participantes, esperávamos que o tempo hábil para conclusão das aplicações ficasse em cerca de vinte horas.

Segue um esquema que expõe as tarefas que foram planejadas para serem desenvolvidas no campo de pesquisa após revisões e inserções durante o campo.

Figura 29: Esquema de tarefas



Fonte: elaboração da autora.

Ressalto que não tivemos tempo hábil para realizar a tarefa “Chegando nas Funções Trigonométricas”, o que será relatado com mais detalhes no capítulo de análise do campo de pesquisa.

4.6. Análise de Dados

A análise e redução dos dados das atividades realizadas pelos licenciandos foram feitasao longo do processo e no final. As respostas escritas dos estudantes, em uma primeira versão da análise foi realizada conforme orienta Kindel (1998) para que ela seja realizada

> [...] durante o processo, seja nas reduções, seja nas respostas lidas para que sobre as mesmas pudessem ser propostas novas atividades conforme a necessidade do grupo de alunos. Estas novas atividades poderiam aprofundar, esclarecer, levantar novas questões, sintetizar ou buscar novos focos de atenção sobre a situação - problema que estavam trabalhando. (KINDEL. 1998, p. 45)

Entende-se como redução das anotações do diário de campo, conforme Kindel (1998. p. 44), “categorias das respostas obtidas, estratégia usada pelos alunos para resolver o problema, proximidade entre os conteúdos trabalhados e sua relação com os demais conteúdos”, destacamos também a proximidade entre os conteúdos abordados e abordagem usada pelos licenciandos em suas práticas como professor visto que eles ou trabalham em escolas ou em outros tipos de experiências profissionais - monitoria e aulas particulares. Segundo Mometi (2007, p. 89), “[...] a redução dos dados se refere ao processo de seleção,focalização, simplificação, abstração e transformação dos dados brutos que aparecem escritos nas notas de campo”.

Para nos ajudar a organizar os dados utilizamos uma planilha no Excel com o objetivo de agrupar e comparar o desenvolvimento dos estudantes ao longo das intervenções em que cada coluna corresponde a um estudante e as linhas a uma resposta.

Figura 30: Tabela compilando dados

	A	B	C	D
2		Sim	Sim	Sim
3	Você aceita fazer parte da pesquisa?	Sim	Sim	Sim
4	Escolha um nome para a sua identificação, com no máximo duas sílabas.	Dekin	Yuumi	Mengo
23	Faça um esboço da Função Inversa da Função Seno, da Função Cossecante e da Função Arco-Seno.	https://drive.google.com/open?id=1RuWXsg5tAYfdgW3xqOx2jpv5MdDoLQpv	https://drive.google.com/open?id=1rSMZG1VzpGKEj9XkkbNp89hEoK0UkLD3	https://drive.google.com/open?id=1qOcF07waJWISGH4L5XTQ8WRlHrbY5Gfs
24	Você realizou consultas para responder esse questionário? Se sim, para qual(is) pergunta(s)?	Sim, google	Apenas na hora de fazer os 3 gráficos a cima.	Sim, a última
25	FORMULÁRIO II - 10/08/2022			
26	Escreva o que você lembra sobre trigonometria no triângulo retângulo.	seno cosseno tangente relações metricas	A relação dos ângulos e dos catetos nos entregando os valores determinados dos senos, cossenos ou tangentes, dependendo da intenção de um exercício especifico.	Que um dos ângulos é 90 graus e os outros dois é 45 e que através dele podemos utilizar o teorema de Pitágoras

Fonte: elaboração da autora.

Ressaltamos que para as respostas manuscritas dos estudantes, utilizamos caixas de texto transcrevendo suas escritas a fim de alcançar a melhor compreensão por parte do leitor.

Em um primeiro momento, com apenas 5 tarefas, aplicamos, discutimos e reelaboramos juntamente com um grupo de 3 licenciandos remotamente, e dessas surgiram novas tarefas. Já em um segundo momento, durante o Estágio Docente e curso de extensão, aplicamos as tarefas à licenciandos para consolidá-las. E em último momento, procuramos validar as tarefas com licenciandos em aplicações presenciais.

No próximo capítulo, apresentamos a análise das respostas obtidas focando nas atividades realizadas presencialmente na pesquisa de campo[5].

[5] Pesquisa: Interação com licenciandos em matemática com Funções Trigonométricas em Ambientes Virtuais; CAAE: 57335322.2.0000.8044; Número do parecer aprovado: 5.494.634

CAPÍTULO 4 - O QUE DIZEM OS LICENCIANDOS SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O que você entende por Funções trigonométricas?

— Relações no plano cartesiano que são cíclicas, ou seja, se repetem. Variando, em seu domínio, entre -1 e 1. (Pedro)

Este capítulo possui o objetivo analisar algumas concepções de licenciandos de matemática sobre as Funções Trigonométricas. Antes de iniciar a análise do campo aplicado em agosto de 2022, temos que nos atentar à trajetória de campo percorrida até o presente momento. A movimentação para a pesquisa de campo teve início em fevereiro em 2021 e desde então as tarefas utilizadas na pesquisa sofreram modificações até culminar em nosso produto educacional.

Em 2021 realizamos três aplicações de maneira remota. Na primeira aplicação, realizada entre os meses de março e maio, iniciamos apenas com o Questionário I e cinco atividades pensadas – Arrasando nas Razões, Ambientação no GeoGebra Classroom, Ambientação no VMTcG, Estudando a Seno e Explorando: Seno e Arco Seno; Seno e Cossecante.

Porém, após a análise das respostas obtidas no Questionário I e conversa com os licenciandos sobre as respostas obtidas e o que eles sentiram de dificuldade e/ou o que não estaria muito claro sobre o assunto, elaboramos quatro novas tarefas a ser aplicadas - Entendendo radianos, Correndo no Ciclo trigonométrico, Chegando nas Funções Trigonométricas e Função inversa e Inversa da função. Totalizando um questionário e nove tarefas.

Essas novas tarefas foram pensadas para que houvesse discussão entre os estudantes sobre cada tópico para que juntos conjecturassem uma ideia e concebessem os conceitos. Para tanto, as três primeiras atividades foram planejadas para serem realizadas no VMTcG e a última através de uma discussão via grupo de WhatsApp.

Nossa primeira impressão foi que cada participante concebe o conceito de Funções Trigonométricas de diferentes maneiras. E que o diálogo e a interação entre os participantes se deram por meio da mesma representação - a palavra Seno, mas sobre objetos semânticos originalmente diferentes.

Outra possibilidade que tivemos para testar as atividades foi em um curso de extensão ministrado por mim pela UFRRJ no mês de julho através da plataforma Moodle. No decorrer do curso percebi que as tarefas não estavam bem claras sobre seu objetivo, pois o retorno das respostas em momentos assíncronos não condizia com o que era proposto. Assim, realizamos uma revisão das tarefas para refiná-la.

De setembro a dezembro de 2021 aplicamos um novo campo, agora já iniciando um questionário e nove tarefas. Nesse período realizei o estágio docente, portanto participei de todas as aulas que permaneceram remotas e pude acompanhar o desenvolvimento da turma como um todo e não só nas aulas propostas por mim, um dos pontos que diferenciam da primeira aplicação.

Um destaque dessa aplicação foi o fato de que os estudantes descreviam os movimentos com frases não de forma como estavam vendo, mas de forma que faziam lembrar o que já haviam estudado. Nesse aspecto, percebi que trabalhar questões já estudadas anteriormente pelo público-alvo pode nos resultar respostas tendenciosas. E o desafio de pensar em quais as indagações válidas para fazê-los pensarem/observarem de outra maneira surgiu.

Após as aplicações, remodelamos e refinamos as tarefas a fim de aplicá-la para validação em uma pesquisa de campo. Em agosto de 2022, iniciamos o campo de pesquisa de maneira presencial e então, além de validar tarefas pudemos perceber e complementá-las tanto para uma abordagem remota como presencial, característica essa com o potencial de mudar a maneira como planejamos uma atividade, o que não nos atentamos inicialmente.

4.1. Percebendo o campo de pesquisa

Com o retorno das aulas presenciais, diferente das aplicações que ocorreram de maneira remota, tivemos apenas 5 encontros de 2 horas cada com os alunos e, por esta razão, tivemos que modificar o que seria abordado em cada encontro. Buscando desenvolver com eles todas as atividades desenvolvidas em encontros remotos.

A pesquisa de campo ocorreu na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) no campus de Nova Iguaçu em uma turma de Ensino de Matemática II no período de 2022.1. A turma escolhida para realização da pesquisa era composta por 17 alunos. Essa turma foi sugerida pela professora orientadora, pois para ela o grupo possuía diversidade de perfis de estudantes o que poderia ser potencialmente significativo para a pesquisa.

As aulas da disciplina Ensino de Matemática II eram, normalmente, ministradas no Laboratório de Observações Vivências e Experiências em Educação Matemática (LOVE_EM), que faz parte do Laboratório Multidisciplinar da UFRRJ/NI. No Laboratório existem materiais didáticos e livros de várias disciplinas (todas ligadas à didática específica, dentre elas a de matemática), três mesas para estudos, uma quadrada e duas redondas, cadeiras para as mesas e algumas carteiras, televisão, data-show e quadro-branco. A sala conta também com algumas bancadas ao redor da sala que poderiam ser utilizadas como mesas. Além desta sala, a pesquisa também se utilizou do laboratório de informática do curso de computação do campus.

No primeiro encontro, apenas 12 estudantes estavam presentes, iniciei falando um pouco sobre a minha formação, minhas dificuldades, motivações e o que eu pretendia realizar e o que buscava alcançar com a pesquisa. Os estudantes separam-se em grupos por afinidade e nos aproveitamos dessa separação para formarmos grupos para o desenvolvimento das tarefas que seguiriam. Dessa maneira, tivemos 4 grupos formados com características distintas. Ressaltamos que algumas tarefas foram realizadas em grupos e outras individualmente.

O grupo A era formado por pessoas que estavam mais quietas, eles eram bem contidos, quase não podíamos ouvir suas vozes sem que estivéssemos bem perto. E era composto por Dre, Juca, Jane e Mel. O grupo B era composto por Ciro, Pitchu, Dekin e Yuumi, três desses haviam realizado a prova para ser monitor da disciplina em questão, e um deles era o monitor. Já no grupo C, os alunos estavam bem animados e riam bastante, Yoda, Mengo, Juju e Harry compunham esse grupo. O grupo D foi formado pelos alunos que faltaram o primeiro encontro, Axe, Mari e Pedro. Os dois estudantes restantes não participaram das tarefas propostas.

Devido à falta de conexão que encontramos no campus no Encontro 4 e a quantidade reduzida de encontros, seguimos uma ordem diferente da planejada, aplicando as tarefas como apresentadasno Quadro 2.

Quadro 2 - Encontros e tarefas

<table>
<tr><td>Encontro 1</td><td>Questionário I
Arrasando nas Razões</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Encontro 2</td><td>Questionário II
Arrasando nas Razões</td></tr>
<tr><td>Ambientação no
GeoGebra</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Encontro 3</td><td>Ambientação no
GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Ambientação no VMT</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Encontro 4</td><td>Estudando a Função Seno</td></tr>
<tr><td>Estudando a Função Seno
e suas inversas</td></tr>
<tr><td></td><td>Entendendo radianos</td></tr>
</table>

Encontro 5	Correndo no Ciclo Trigonométrico

Fonte: elaboração da autora.

Das tarefas planejadas, não foi possível realizar a tarefa “Chegando nas funções trigonométricas” pois os estudantes utilizaram mais tempo que o previsto em tarefas anteriores. Vale destacar ainda que, o número de encontros no laboratório de informática foi limitado à quatro pois coincidia com horário de aulas, gentilmente cedido pelo professor regente de uma disciplina obrigatória do curso de computação.

4.2. Analisando os dados coletados

De antemão deixamos claro que algumas atividades tiveram maior foco e mais detalhamento que outras. Isso ocorreu, pois em algumas atividades os licenciandos trocavam suas ideias de maneira oral e a falta de recursos para captar essa interação não nos permitiu realizar uma análise posterior.

No campo de pesquisa tivemos 4 grupos formados, mas iremos apresentar aqui apenas a análise de um, o grupo B, pois após compilar os dados gerados, percebemos que os integrantes desse grupo estiveram presentes em quase todos os encontros quando comparado com os demais.

Salientamos que uma das características das tarefas pensadas nessa pesquisa é a não dependência entre elas, pois é possível aplicá-las em diferentes ordens, logo também é possível analisá-las em diferentes ordens

4.2.1. Questionário [Encontro 1 e 2]

Ao realizar o questionário I em busca de compreender a posição inicial dos licenciandos, tivemos a seguinte caracterização, dentre os alunos participantes da pesquisa, cinco estavam no 8° período, quatro no 7° período, dois no 9° período, dois no 10° período, um no 12° período e um no 14° período.

Cinco alunos alegaram que atuavam em rede privada, oito não atuavam e dois na rede pública. Os que atuam na rede pública: Ciro atua do 3° ao 9° ano do ensino fundamental e Axe nos 6° e 7° anos do ensino fundamental. Já na rede privada: Dekin atua do 6° ano do ensino fundamental ao 3° ano do ensino médio; Yuumi do 6° ao 9° ano do ensino fundamental; Pitchu no 4° e 5° anos do ensino fundamental; Yoda do 3° ao 9° do ensino fundamental e Pedro do 5° ano do ensino fundamental ao 3° ano do ensino médio.

Mengo, Jane, Dre, Harry, Mel, Mari, Juca e Juju não atuam.

No levantamento das concepções, na primeira parte buscamos elaborar perguntas específicas sobre o tema a ser abordado na pesquisa, tais como: quais os conteúdos de geometria estudados no Ensino Fundamental II, se conheciam algum software dinâmico para o estudo de funções, se estudaram Funções Trigonométricas no Ensino Médio, o que entendiam por Funções Trigonométricas e quais conceitos consideram pré-requisitos para o seu aprendizado. Na segunda e terceira parte, as concepções eram acerca das transformações gráficas e esboço de funções.

Dentre os conteúdos estudados de geometria no Ensino Fundamental II, apareceram os seguintes conteúdos: perímetro, área, volume, ângulos, retas, plano cartesiano, triângulos, formas geométricas, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, segmentos, semirretas, quadriláteros, polígonos.

Dois alunos não conheciam o GeoGebra. E cinco dos treze que conheciam o GeoGebra já fizeram algum curso sobre ele. Todos estudaram Funções Trigonométricas no Ensino Médio.

Com base na planilha de compilação do Excel, elaboramos um quadro de respostas dos participantes sobre suas concepções (APÊNDICE A- QUADRO DE RESPOSTAS), levando em consideração onde atuam e quais ideais transmitem. Abaixo segue o Quadro 3 com o que cada licenciando do grupo B entende como Funções Trigonométricas, o que eles acham ser pré-requisitos para entender Funções Trigonométricas e que conceitos/ideias, em nossa interpretação, estavam presentes em suas respostas escritas.

Quadro 3 – Respostas grupo B - O que você entende por Funções Trigonométricas?

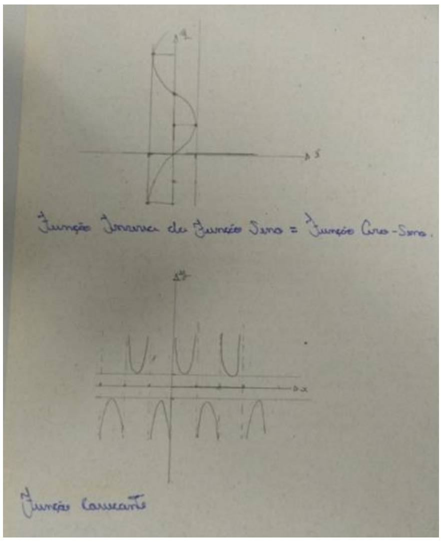
Nome	O que você entende por Funções trigonométricas?	Pré requisitos para entender Funções Trigonométricas	Ideias/ações presentes no texto escrito
Atuam em algum nível de ensino de instituições públicas			
Ciro	*Uma forma alternativa de se estudar os eixos e analisar frequência.*	*Um sólido conhecimento de frequências, comprimento e trigonometria básica.*	Plano cartesiano; medidas e suas comparações.
Atuam em instituições privadas			
Dekin Atua no E.Médio	*Funções dentro do círculo trigonométrico*	*Conhecimento de funções e do círculo trigonométrico*	Ciclo trigonométrico; conceito de função
Yuumi	*Entendo como uma função clique trás um gráfico angular, essencial para o estudo geométrico, como principalmente triângulos.*	*O conhecimento sobre retas, ângulos, plano cartesiano, algumas fórmulas.*	Ângulos; elementos de triângulos; plano cartesiano.

Pitchu	*São funções cujo a imagem delas são determinadas a partir de algum ângulo.*	*Entendimento básico do que são funções e ângulos.*	Funções; ângulos.

Fonte: Elaboração da autora.

Observe os estudantes possuem diferentes bases e compreensões sobre funções trigonométricas. Na última parte do questionário em que pedíamos para que eles esboçassem alguns gráficos tivemos as seguintes respostas:

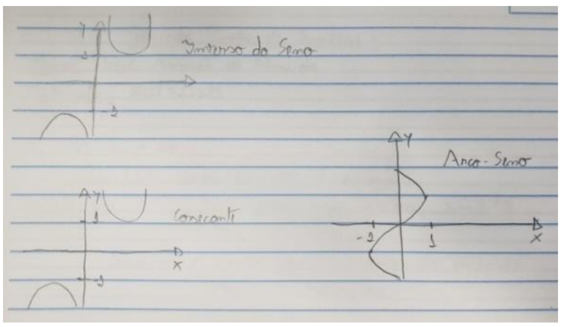
Figura 31: Esboço de Ciro



Fonte: elaboração da autora.

No esboço de Ciro, Figura 30, podemos observar que para a Função Cossecante ele realiza uma construção semelhante ao gráfico esperado, mas para a Função Arco Seno, ele realiza apenas a reflexão da Função seno, não se preocupando com restrições, dando ideia de que a função Arco Seno irá ter períodos de repetição assim como a Função Seno.

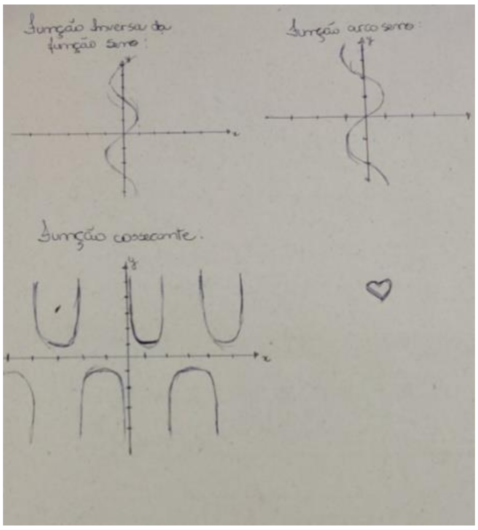
Figura 32: Esboço de Dekin



Fonte: elaboração da autora.

Já Dekin, ao realizar o esboço da Função Arco Seno, Figura 31, nos transmite a ideia de restrição a apenas um período, porém restringi-la dessa forma não é suficiente para termos a Função inversa da Função Seno. Por outro lado, Dekin considera que a Função Inversa da Função Seno é a Função Cossecante, representando-a também em apenas um período.

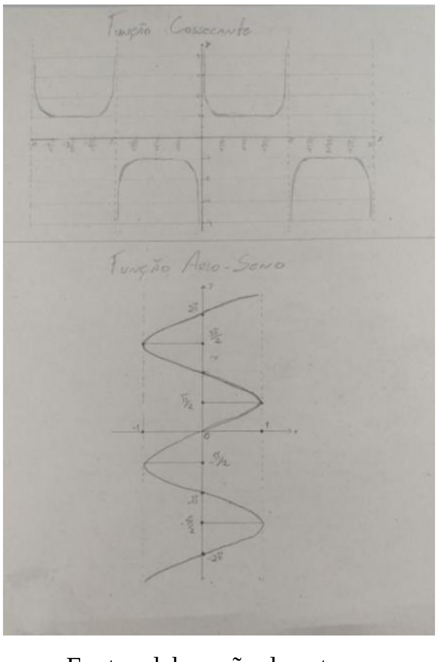
Figura 33: Esboço de Yuumi



Fonte: elaboração da autora.

Na resposta de Yuumi, Figura 32, podemos observar algo semelhante a resposta de Ciro. Concordando com a resposta dada por Pitchu, Figura 33, que foi o único licenciando a graduar os eixos com valores em radianos.

Figura 34: Esboço de Pitchu



Fonte: elaboração da autora.

Podemos observar que os quatro licenciandos esboçam a Função Arco-Seno com um desenho que não representa uma função, nos fazendo refletir sobre o estudo do conceito de uma função, ou seja, da definição de função e da representação gráfica de uma função que pode não estar claro para eles. Além disso, Dekin representa a Função Inversa da Função Seno como a Função Cossecante, nos fazendo considerar uma possível falha na comunicação, pois ele poderia estar considerando a função inversa multiplicativa da Função Seno, uma vez que o inverso da razão seno é a cossecante.

Após obter as respostas escritas dos estudantes e analisar que ideias elas apresentaram para nós, sentimos a necessidade de entender outras questões, diferente das aplicações anteriores. Por essa razão, elaboramos e aplicamos um questionário II antes de iniciar a aplicação de tarefas.

O questionário II foi formulado com questões que buscaram entender o que os licenciando entendiam sobre as ideias inerentes às respostas escritas no quadro 3. Queríamos entender o que eles sabiam sobre trigonometria no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico e que funções compreendiam bem, suas respostas estão descritas no quadro 4.

Quadro 4: Respostas grupo B - Questionário II

Nome	Escreva o que você lembra sobre trigonometria no triângulo retângulo.	Agora comente qual a sua concepção sobre o Ciclo Trigonométrico.	Qual(is) Função(ões) Trigonométrica(s) você conhece bem
Ciro	*Aplicações sobre as leis do cosseno e seno, em especial para o caso do triângulo retângulo, onde o cosseno do ângulo oposto à hipotenusa é 0. Isso nos dá, por exemplo: Teorema de Pitágoras, Semelhança de triângulos, soma de ângulos internos, aplicações do teorema de Tales.*	*O ciclo trigonométrico remete ao estudo do conceito de complementações e suplementações de ângulo, mudanças de parâmetros, frequências (repetições) e acima de tudo, uma forma alternativa e equivalente de trabalhar coordenações de pares ordenado (exemplo: Argumentos dos números complexos)*	*Função Seno, Função Cosseno, Função Tangente, Função Secante, Função Arco-Seno, Função Arco-Cosseno*
Dekin	*seno cosseno tangente relações métricas*	*uma circunferência de raio 1 que pode dizer os valores das relações trigonométricas dos ângulos de um triângulo*	*Função Seno, Função Cosseno, Função Tangente*
Yuumi	*A relação dos ângulos e dos catetos nos entregando os valores determinados dos senos, cossenos ou tangentes, dependendo da intenção de um exercício específico.*	*Um círculo de raio 1, onde podemos observar os valores de seno e cosseno de acordo com a "sombra" que a interceptação do ângulo com a borda do círculo projeta sobre o eixo x (cosseno) ou sobre o eixo y (seno).*	*Função Seno, Função Cosseno, Função Tangente*

Pitchu	*O quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos.*	*É uma circunferência de raio 1, o qual usamos para calcular algumas funções trigonométricas, como seno, cosseno, tangente, entre outros.*	*Função Seno, Função Cosseno, Função Tangente*

Fonte: elaboração da autora.

Um dos pontos que observamos nas respostas do questionário II, é que Ciro diz conhecer bem a Função Arco Seno, mas ao pedir para realizar o esboço no questionário I, ele não conseguiu esboçar o gráfico corretamente. Para Ciro, tanto as Funções Trigonométricas quanto o ciclo trigonométrico são formas alternativas de trabalhar o plano cartesiano.

Após compreender como cada um deles entende os conceitos que abordaremos nas tarefas, iniciamos a aplicação delas com o objetivo de buscar fundamentações/afirmações para as respostas escritas dos estudantes nos questionários. Iniciando pela a análise de gráficos no GeoGebra Classroom.

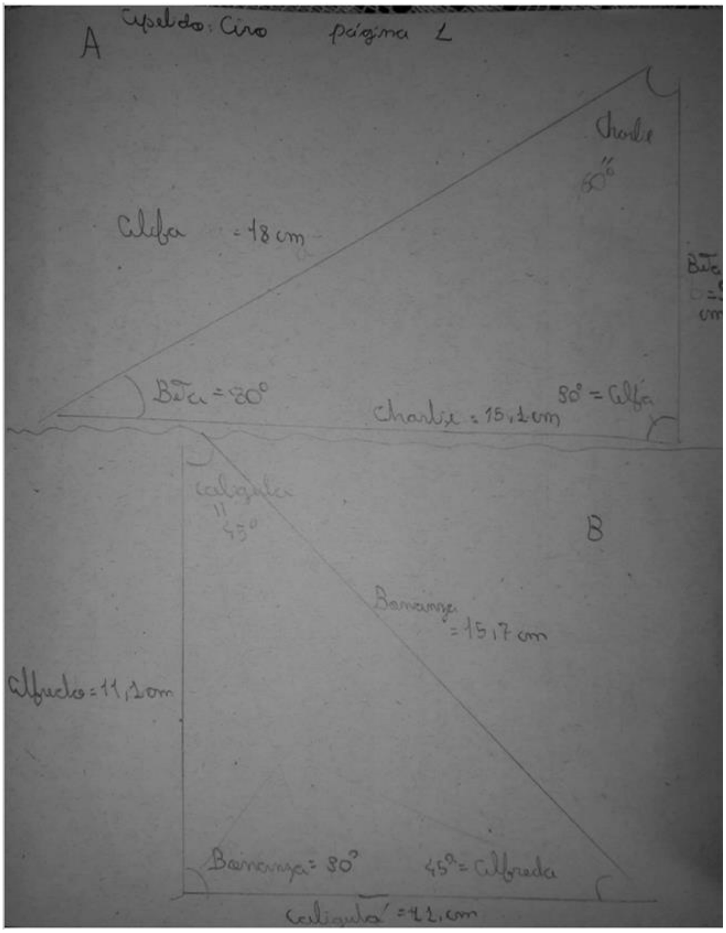
4.2.2. Arrasando nas Razões [Encontro 1 e 2]

O objetivo principal dessa tarefa consiste em compreender o par de esquadros como um material didático para o estudo de razões trigonométricas. Buscamos, com essa tarefa, introduzir a discussão sobre conceitos trigonométricos de maneira não convencional.

Diferente das demais, essa tarefa não fez uso do ambiente virtual que agregam o software dinâmico GeoGebra, pois acreditamos que o uso de materiais manipuláveis físicos também possa auxiliar na aprendizagem de conceitos em consonância com a ideia de Lorenzato (2010) de que ao utilizar um material concreto seja essencial para a aprendizagem inicial de conceitos, mesmo que esses necessitem de complemento para gerar abstrações matemáticas.

Ao pedir que os estudantes medissem o par de esquadros e preenchessem a tabela, alguns estudantes receberam o comando com certa estranheza e perguntaram se era necessário realizar a medição dos esquadros, já que normalmente estes vêm graduados. Diante da afirmação, alguns estudantes decidiram, ao invés de apenas medir os instrumentos, desenhá-los na folha de papel para que depois pudessem medir os seus lados, conforme registro a seguir feito por Ciro, enquanto Yuumi e Pitchu, companheiros do grupo, optaram por medir diretamente os lados dos esquadros usando a régua ou o outro par de esquadro.

Figura 35 - Atividade Arrasando nas Razões Ciro



Fonte: elaboração da autora.

Um ponto que cabe ressaltar é de que mesmo após terem feito as medições e terem encontrado as razões trigonométricas, alguns dos estudantes recorreram ao Google para consultar se os valores obtidos estavam de fato corretos, esboçando uma reação de espanto e alegria por terem confirmado resultado e a surpresa de terem identificado que as razões encontradas eram os valores dados pelas razões trigonométricas.

Antes de finalizar a análise desta atividade, gostaríamos de comentar o fato de que alguns estudantes se surpreenderam por ter que medir a partir do vértice e não a partir do valor inicial e final registrado nos lados do esquadro, bem como termos observado que alguns estudantes começaram a medir a partir do um e não do zero. O que confirma a falta de conhecimento sobre o uso do material e que muitos deles afirmarem tê-los usados pela primeira vez em atividades realizadas nas aulas de matemática.

4.2.3. Ambientação no GeoGebra(Análise de gráficos) [Encontro 2 e 3]

Para a atividade Ambientação no GeoGebra, utilizamos o GeoGebra Classroom que consiste em um Ambiente Virtual de Aprendizagem que possui o GeoGebra integrado. Nesse espaço é possível criar uma sala de aula virtual e montar tarefas de exploração e/ou construção a ser realizadas no GeoGebra, além de ter a possibilidade de inserir arquivos para leitura e instruções e um campo de entrada para respostas dos participantes às tarefas.

Para acessar tarefas nesse espaço, basta ter posse de um código que é gerado no momento da criação da sala pelo autor da tarefa. A interatividade entre licenciados e o ambiente pôde ser observadas em tempo síncrono, pois esse espaço permite que o autor acompanhe as construções.

Nosso objetivo com essa tarefa foi apresentar e ambientar os participantes da pesquisa ao software GeoGebra, além da análise de gráficos das funções Afins e Quadráticas em um AGD, que por sua vez é diferente da análise realizada em papel milimetrado. Pois, em nosso caso, ao analisar gráficos de uma função no papel milimetrado olhamos para cada função com parâmetros fixos, já em um ambiente dinâmico – como o GeoGebra com a ferramenta controle deslizante - podemos observar características variantes e invariantes àquela classe de funções.

Essa tarefa foi proposta no segundo encontro com os licenciando e ocorreu no laboratório de informática e os estudantes participaram de maneira individual.

Antes de começarmos a descrição é importante ressaltar que as respostas não foram modificadas, entretanto os erros ortográficos ou os de concordância foram corrigidos por entendermos que estas não alteram o significado do que o estudante quis informar.

Nesta aula, Pitchu, integrante do grupo B estava presente, mas não realizou a atividade em questão.

O primeiro item da atividade solicitava que os estudantes identificassem que tipo de mudança ocorre quando se modifica o parâmetro a da função $y = ax + b$ utilizando o controle deslizante variando a no intervalo solicitado. Ou seja, **qual tipo de mudança ocorre quando mexemos no controle deslizante *a*?**

Neste caso, a função apresenta um ponto fixo no eixo y e que é igual ao valor de b no qual o controle permaneceu parado enquanto o licenciando mexe o controle do coeficiente angular. Cada uma das respostas considera um aspecto diferente do movimento das retas. Ou seja, o ponto fixo associado ao parâmetro b que não se modifica e que, por sua vez, determina o ponto em que a reta corta o eixo y, o movimento e a angulação da reta em relação aos eixos (coeficiente angular).

Para o ponto fixo e a angulação da reta, Ciro diz:

> "*A angulação da reta mudará em torno de onde a função toca o eixo y, alterando dessa forma as imagens*"

Entretanto, não identificamos a justificativa para o ponto fixo que está relacionado com o valor de b, que é o mesmo para todas as funções uma vez que não era para mexer com o controle deslizante envolvendo esse ponto. Note que somente Ciro considera o ponto em que as retas cortam o eixo y, mas na pergunta específica ele afirma que não observa nada.

Yummi, por sua vez, considera o movimento associado à mudança dos valores do coeficiente *a* que se modifica em função do deslocamento do controle deslizante e diz:

> "*Ao movermos o controle deslizante a rotacionamos a nossa reta, caso aumente o valor, a reta se aproxima do eixo y, e ao diminuir, ela se aproxima do eixo x*".

Enquanto Dekin responde sucintamente que a inclinação muda:

> "*mudamos a inclinação da reta*".

Veja agora, o que os estudantes consideraram como sendo o papel do b, ao mexermos o controle deslizante. Foi perguntado: **E qual tipo de mudança ocorre quando mexemos no controle deslizante b?**

Ciro diz:

> "*Ao alterar o deslizante b, "criamos" retas paralelas à anteriormente fixada, sempre se deslocando paralelo ao eixo x*".

Aparentemente sua reposta se apoia em uma função em que o coeficiente angular é igual a zero, provavelmente, ele tenha observado a função y = b.

Já Dekin diz:

> "*Andamos com a reta pra trás e pra frente*".

E Yummi diz:

> "*Já no controle deslizante b, movemos a nossa reta pelo eixo x, ao aumentar, a reta segue ao(sic) para o*[6] *lado negativo do gráfico, e ao diminuir, segue ao(sic) para o lado positivo*".

Quando se pergunta o que acontece quando o coeficiente angular é negativo. Ou seja, **quando o valor de *a* se torna negativo, por quais quadrantes a reta passa? O que isso significa?**

Quadro 5: Quando o valor de a se torna negativo, por quais quadrantes a reta passa? O que isso significa?

Ciro	Dekin	Yummi
Depende da onde "esta fixado" o b da reta. Por exemplo, se b > 0, então a reta passará pelo 1º, 2º e 4º. se b < 0 passará pelo 2º,3º e 4º. E, finalmente se b = 0, somente no 2º e 4º	*Depende do valor de B, se B for positivo passará pelo primeiro, segundo e quarto quadrantes, se B for negativo passará pelo segundo, terceiro e quarto quadrantes, e se B for 0 passará pelo segundo e quarto quadrantes.*	*Quando temos um valor negativo para a, os quadrantes por onde passa a reta é o 2º quadrante e o 4º quadrante. Isto significa que a função se tornou decrescente.*

[6]Substituímos o termo "ao" usado pela estudante por "para o", para melhor compreensão do texto.

Podemos inferir que as respostas de Ciro e Dekin advém de uma observação feita olhando o gráfico e a movimentação dos controles deslizantes. Já Yummi, observa o lugar em que o gráfico passa pelos quadrantes e as classifica em crescente ou decrescente em função de sua angulação (virada para a direta ou para a esquerda respectivamente). Sua resposta se apoia em aprendizagem anterior, muito presente em livros didáticos.

As respostas de Ciro e Dekin utilizam linguagens diferentes para passar a mesma mensagem, enquanto Ciro faz uso de símbolos matemáticos como $>$ (maior que), $<$ (menor que) e = (igual), Dekin se utiliza da língua materna. Para Arcavi (1994), se utilizar de símbolos matemáticos requer que o aluno compreenda seus sentidos para então se comunicar com/sobre eles.

A próxima atividade também aborda a análise gráfica, porém a análise de funções trigonométricas e, diferentemente da atividade anterior, foi realizada em grupo.

4.2.4. Estudando a Função Seno e Estudando a Função Seno e suas inversas [Encontro 4]

Esta atividade foi realizada pelos alunos em grupo, utilizando o software GeoGebra, previamente instalado nos computadores do laboratório de informática. Na tarefa, pedimos que os licenciados respondessem duas questões observando a mudança dos parâmetros da função seno no GeoGebra por meio da movimentação dos controles deslizantes.

i) O que ocorre quando modificamos cada parâmetro da função f(x) = a * sen (b*x + c) + d?

ii) Que restrições realizar em f(x) = sen(x) para obter a sua função inversa?

Diferente da atividade de Ambientação, em que os estudantes responderam com riqueza de detalhes, nessa atividade as respostas foram mais objetivas. De acordo com o diário de campo da autora, as respostas pouco detalhadas obtidas nessa atividade deu-se pelo fato de que os licenciando se comunicaram oralmente entre eles, cabe ressaltar que para uma pesquisa de campo a existência de uma câmera para capturar os gestos e um gravador para captar os áudios enriqueceria as análises posteriores e compreensão de alguns pontos não claros nas análises de material escrito.

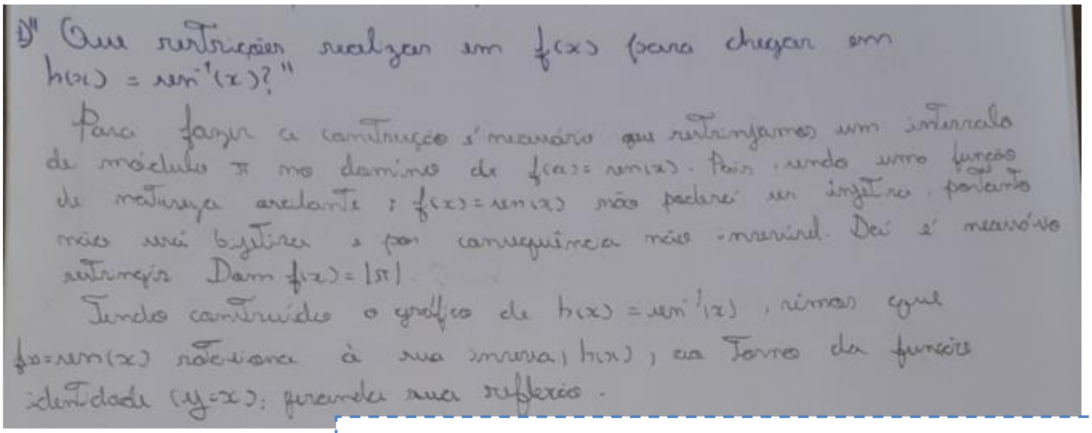
Conforme Yin (2016)

> compreender e analisar a conversão e as interações entre duas pessoas. Você precisaria poder gravar, se não filmar, a conversação delas porque seu interesse iria muito além das palavras específicas da conversa. Entre outros sinais, seus dados também incluiriam o modo como as palavras foram mescladas ou encurtadas, além

das pausas, sobreposições e linguagem corporal entre os interlocutores (YIN, 2016, p.5).

Em nossa pesquisa, foram desses elementos que sentimos necessidade, pois ao analisar a atividade realizada em grupo percebemos que, ao comparar as anotações no diário e as respostas obtidas, os licenciados observaram e discutiram mais aspectos e conceitos do que aqueles que anotaram.

Diferente da ordem em que a tarefa foi pedida, os alunos a realizaram na ordem contrária. Para a tarefa *ii)* o grupo concordou com a seguinte ideia:


ii) "Que restrições realizar em f(x) para chegar em h(x) = sen⁻¹(x)?"
Para fazer a construção é necessário que restrinjamos um intervalo de módulo π no domínio de f(x) = sen(x). Pois sendo uma função de natureza oscilante f(x) = sen(x) não poderá ser injetora, portanto não será bijetora e por consequência não inversível. Daí é necessário restringir Dom f(x) = |π|
Tendo construído o gráfico de h(x) = sen⁻¹(x), vimos que f(x) = sen(x) rotaciona à sua inversa, h(x), ao torno da função identidade (y=x), gerando sua reflexão.

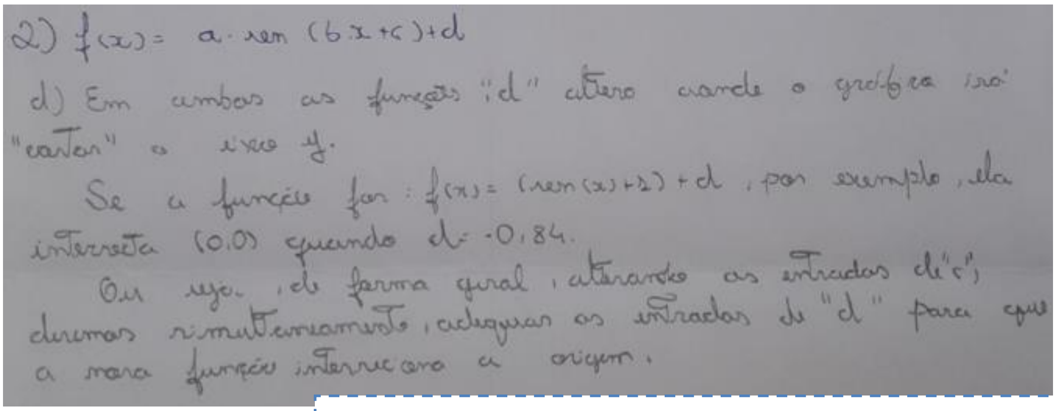
Para fazer a construção é necessário que restrinjamos um intervalo de módulo π no domínio de f(x) = sen (x). Pois sendo uma função de natureza oscilante f(x) = sen (x) não poderá ser injetora, portanto não será bijetora e por consequência não inversível. Daí é necessário restringir Dom f(x) = |π|.

Tendo construído o gráfico de h(x) = sen^{-1}(x), vimos que f(x) = sen (x) rotaciona à sua inversa, h(x), em torno da função identidade (y = x) gerando sua reflexão.

Não compreendemos totalmente o que eles queriam dizer com esse posicionamento, mas durante a aula, de acordo com o diário e campo, os estudantes fizeram a restrição no domínio da função para o intervalo [0, π], ou seja, x ∈ [0, π]. Na atividade, observamos que os estudantes convencionaram que o domínio seria |π|.Mas, se o domínio é o apresentado pelos estudantes então a função possui apenas um ponto.

Os estudantes continuaram a analisar a função f(x) = sen (x) novamente para ver em que intervalo da função ela é injetora.

Para a atividade *i)* o grupo conjecturou a seguinte resposta:


2) $f(x) = a \cdot sen\,(bx + c) + d$

d) Em ambas as funções "d" altera aonde o gráfico irá "cortar" o eixo y.

Se a função for: $f(x) = (sen(x)+1) + d$, por exemplo, ela intersecta (0,0) quando $d = -0{,}84$.

Ou seja, de forma geral, alterando as entradas de "c", devemos simultaneamente adequar as entradas de "d" para que a nova função intersecciona a origem.

Em ambas as funções, “d” altera aonde o gráfico irá “cortar” o eixo y.

Se a função for: $f(x) = (\text{sen}\ (x) + 1) + d$, por exemplo, ela intersecta (0,0) quando $d = 0{,}84$.

Ou seja, de forma geral, alterando as entradas de “c” devemos simultaneamente adequar as entradas de “d” para que a nova função intersecciona a origem.

Eles observaram apenas dois dos quatro parâmetros da função seno. Os estudantes fixaram o ponto da origem (0,0) para fazer as considerações sobre as transformações gráficas. Primeiro eles supõem um valor para o parâmetro c ($c = 1$) e observam o que ocorre com o parâmetro d, mas sempre buscando que o gráfico passe pela origem.

Com a nossa proposta, os estudantes ficam livres para manipular, observar e conjecturar o objeto de estudo, o que difere do que é feito nos livros didáticos em que as definições são, normalmente, apresentadas no início da abordagem.

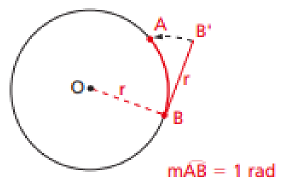
Durante essa atividade os alunos ficaram surpresos e animados com as descobertas feitas ao manipular os controles deslizantes e observar o que acontece quando se muda os valores de cada um dos parâmetros.

4.2.5. Ambientação no VMT, “Entendendo radianos e Correndo no ciclo trigonométrico” [Encontro 3 e 5]

Para iniciar a análise das atividades. Entendendo radianos e “Correndo no ciclo trigonométrico”, vamos refletir e relembrar como esses conteúdos são apresentados para os estudantes nos livros didáticos. Observe como Iezzi (2013) apresenta e explica radiano

Figura 36: Definição de radiano

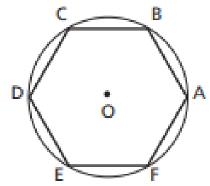
41. **Radiano** (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



42. É evidente que uma circunferência mede 360°, porém já não é tão fácil dizer quantos radianos mede uma circunferência.

Podemos chegar a uma noção intuitiva do valor dessa medida, considerando a seguinte construção:

1º) Em uma circunferência de centro O e raio *r* inscrevemos um hexágono regular ABCDEF. Cada lado do hexágono tem comprimento *r*:

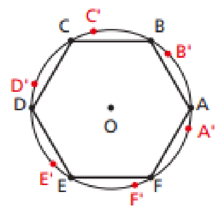


$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = r$$

2º) A circunferência fica dividida em 6 arcos de medidas iguais

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$$

e, sendo o comprimento do arco sempre maior que o comprimento da corda correspondente ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são cordas da circunferência), todos esses arcos são maiores que 1 rad.



3º) Em cada um dos citados arcos "cabe" 1 rad:

$$\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{BC'} = \overset{\frown}{CD'} = \overset{\frown}{DE'} = \overset{\frown}{EF'} = \overset{\frown}{FA'} = 1 \text{ rad}$$

e ainda sobra uma fração de radiano.

4º) O radiano "cabe" 6 vezes na circunferência e mais a soma dessas "sobras". Mais precisamente demonstra-se que a circunferência mede 6,283184... rad (número batizado com o nome de 2π).

Tendo em vista essas considerações, podemos estabelecer a seguinte correspondência para conversão de unidades:

$$360° \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

Fonte: Iezzi (2013, p. 27)

A principal diferença entre o livro e o uso do GeoGebra é a animação presente no ambiente de geometria dinâmica, enquanto no livro é apresentado um exemplo estático que não permite a observação e manipulações por parte dos estudantes para testar suas hipóteses, em nossa tarefa proposta almejamos que através da construção e manipulação, os estudantes possam testar, conjecturar levantando hipóteses e se possível identificar regularidades que possam ser identificadas como algumas das regras a serem decoradas.

Nessa atividade,os estudantes estavam organizados em grupos formados por quatro integrantes e deveriam realizar a construção do ciclo trigonométrico para que em seguida observassem o que era pedido.

Durante a construção os estudantes tiveram dificuldade em realizarem a tarefa em conjunto no VMTcG, o que pode ser observado nos trechos a seguir.

Essa dificuldade foi observada também na atividade Ambientação no VMT, em que os estudantes estavam separados em 8 duplas em uma mesma sala, nossa suposição era de que ponto problemático seria apenas a quantidade de pessoas na sala virtual, mas essa hipótese não foi validada quando o mesmo problema surgiu na atividade em que o número de estudantes por sala estava reduzido a 4 participantes.

Os trechos apresentados a seguir apresentam um panorama geral dessa atividade para esse grupo, pois os estudantes não discutiram como poderiam realizar a atividade. Cada um dos estudantes manipulou a construção e escreveu suas considerações.

Pitchu*: Bora que bora?*
Yuumi:*Posso assumir o controle?*
Ciro:*Bora*
Pitchu:*A vontade*
Ciro:*começou*
Pitchu:*Dá zoom aí amigo*
Ciro:*vocêsestáo em que passo?*
Dekin:*Posso assumir o controle?*
Pitchu*: Posso assumir o controle?*
Ciro*: ninguém conversa*
Ciro*: aonde vocês estão w*
Ciro:*?*

Pitchu:*Posso assumir o controle?*
Ciro:*quando fizerem uma etapa, passa o controle*
Yuumi*: Fiz até a d*
Ciro:*aonde estamos agora?*
Yuumi*: na e)*
Yuumi*: Fiz o ângulo*

Podemos observar que Ciro não consegue acompanhar o que está ocorrendo na atividade.Após a construção, a primeira parte da atividade consistia em responder a seguinte pergunta **Movimente o ponto C e observe, qual a relação do ângulo *a* com o arco BC?**

No trecho a seguir, podemos observar que Yuumi responde diretamente enquanto Picthu tenta realizar a atividade em grupo por meio de perguntas, observamos também que Ciro não consegue acompanhar o que está sendo realizado.

Ciro:*conseguiram?*
Yuumi*: tá dando o valor que está no arco*
Pitchu*: E aí rapeize*
Pitchu*: estão vendo a relação?*

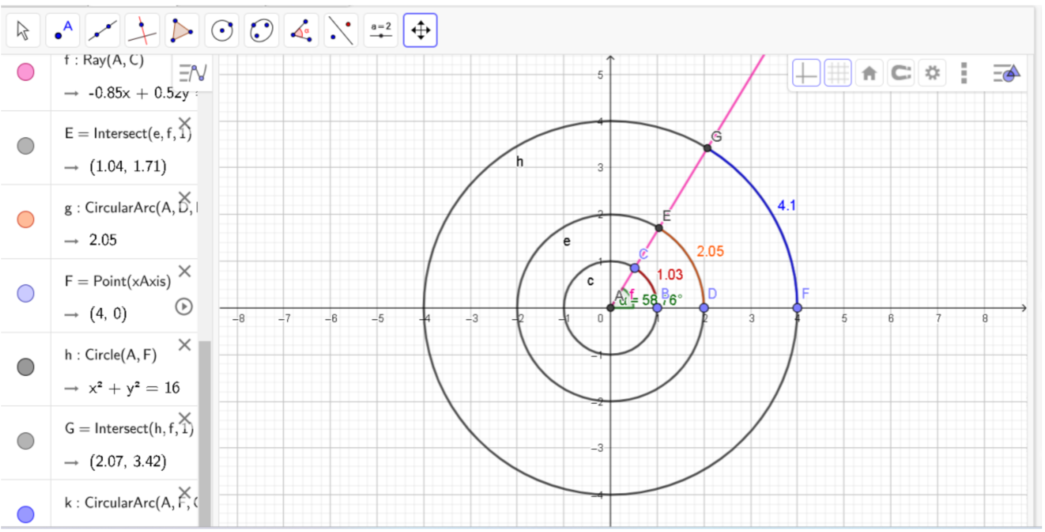
Ciro*:* *poh. o que mudou?*
Pitchu*:* *No caso é essa "a" pretinho do final*
Ciro*:* *nao vi nada*
Pitchu*:* *É um valor*
Ciro*:* *mexe aí*
Pitchu*:* *Acho que é pra vermos que ao multiplicar por Pi e dividir por 180° dá no mesmo*
Pitchu*:* *Controle tá contigo fih*
Ciro*:* *hum*
Ciro*:* *ok*
Ciro:*enfim*
Ciro:*bora seguir*

A seguir, Pitchu continua interagindo no *chat* na busca por desenvolver a atividade em conjunto. Mas observamos que não há discussão para construir conceitos e que apenas Pitchu faz as considerações sobre a atividade.

Pitchu:*Mexe aí*
Pitchu:*Pra ver se tu concorda com a minha hipótese*
Ciro*:* *éisso? mover o C?*
Pitchu*:* *Isso*
Ciro:*aaah sim, nesse caso sim*
Ciro*:* *agora entendi*
Pitchu*:* *Aí o valor do arco é o valor do ângulo, multiplicado por pi e dividido por 180º*

A segunda parte dessa tarefa consistia em realizar a construção apresentada na Figura 36, e que discutissem e apresentassem as considerações de acordo com suas manipulações.

Figura 37: Construção no VMTcG



Fonte: captura de tela da Atividade Entendo radianos do grupo B

Nessa parte os licenciandos deveriam movimentar o ponto C e escrever observações sobre a comparação dos valores do arco em cada circunferência. Mais uma vez Pitchu é quem inicia colocando as suas considerações.

Pitchu:*No caso*
Pitchu:*O valor do arco Dobra*
Ciro:*simsim*
Pitchu*: Porque o raio é o dobro do arco de dentro*
Ciro:*uhum, eu tava acompanhando a saída ali no canto esquerdo*
Ciro:*tá aparecendo as imagens*
Ciro:*manerin*
Pitchu*: Será que se a gente fizer um novo arco de raio 4, ele vai dobra a dobra do que dobrou? rs*
Ciro*: bora*
Mediadora*: qual seria o valor do ângulo de 90° em radiano?*
Pitchu:*é o 1,57*
Pitchu*: Porque é o mesmo do primeiro arco*
Mediadora: *Não poderia ser o do segundo arco?*
Pitchu:*Tipo, o ângulo é o mesmo, mas o valor muda*
Pitchu*: O ângulo é 90° em todos*
Yuumi*: Posso assumir o controle?*
Yuumi: *Tá aí teu valor, de nada*
Pitchu*: Então, o valor tá sendo multiplicado pelo valor da coordenada no eixo X*

Pitchu tenta levantar hipóteses sobre o que aconteceria, mas os outros licenciandos não respondem à sua solicitação e mais uma vez não há diálogo entre os licenciandos, Pitchu realiza a atividade sem muito debate com os demais.

Na atividade "Correndo no ciclo trigonométrico" eles interagiram mais, porém não concluíram a atividade. No trecho a seguir, as estudantes iniciam uma conversa sobre como irão realizar a atividade. Ou seja, o grupo entra em atividade.

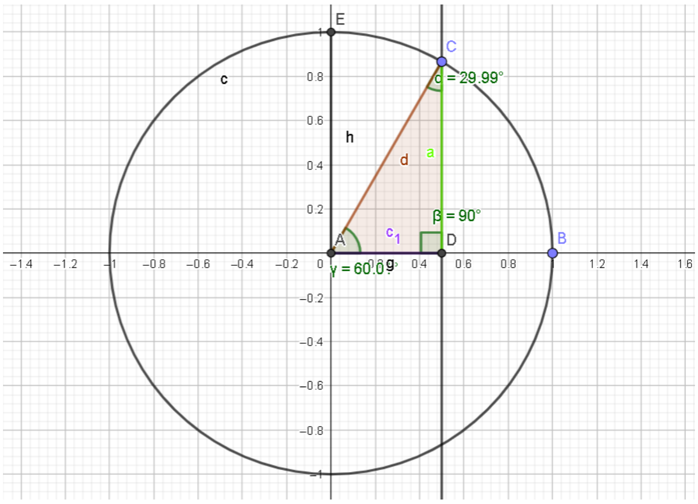
Pitchu*: Faz a circunferência*
Yuumi*: vai fazer o triângulo retângulo*
Pitchu*: Agora marcar os ângulos*
Ciro*: Posso assumir o controle?*
Pitchu:*Vai meu querido*
Ciro*: vou movimentar*
Ciro*: por favor vejam*
Ciro*: ok*
Ciro*: prosseguido*
Yuumi*: muda a cor da reta*
Yuumi:*parou onde?*

No trecho acima temos representado um momento em que parece que Ciro executa os comandos enquanto os demais dizem a ele o que fazer e isso pode ter se dado pelo fato de que para visualizar as instruções, os licenciandos precisavam trocar de aba, ou seja, sair da aba de construção e ir para aba de instruções. Além de ler as instruções, Yuumi também acompanha o que Ciro está realizando.

Yuumi*: O ângulo Beta sempre continua Reto*
Pitchu*: Que observação podemos ter sobre o ângulo ACD*
Yuumi:*Já falei uma*
Pitchu*: é o alpha rs*
Pitchu:*Ahn tem que falar sobre todos os ângulos*
Pitchu*: Okay*

Nesse ponto da construção e realização da atividade, os licenciandos estão entrando em atividade, ou seja, eles estão tomando conhecimento da tarefa, eles leram, executaram e observam o que acorre para conjecturarem suas respostas. A atividade pede para mudar a cor da semirreta com a finalidade de dar ênfase aos diferentes elementos que compõe a construção.

Figura 38: Triângulo no primeiro quadrante



Fonte: captura de tela da Atividade Correndo no ciclo trigonométrico do grupo B

Eles inicialmente fizeram considerações sobre um ângulo no primeiro quadrante, mas pela forma que se deu a construção, ao analisarem no segundo quadrante eles começam a observar um ângulo externo.

> **Ciro:** *poh, pq que tipo*
> **Ciro:** *quando vai pro segundo quadrante*
> **Ciro:** *ele trabalha os angulos externos?*
> **Pitchu:** *Acho que a observação é que quando eles estão nos quadrantes ímpares aparecem os ângulos internos do triângulo*
> **Pitchu:** *E nos pares os externos*

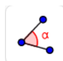
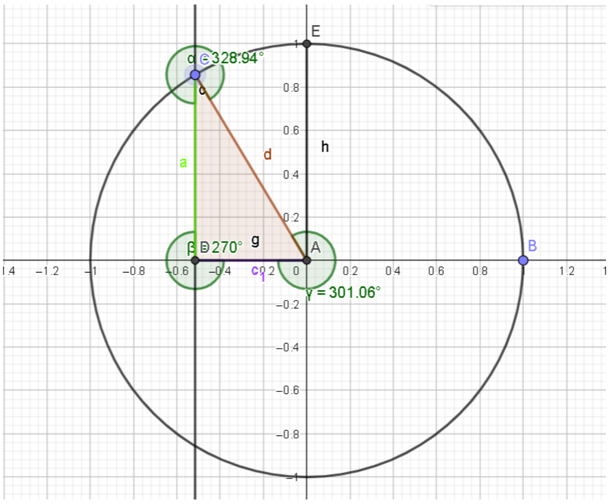
Na tarefa eles deveriam realizar o seguinte comando: Utilizando a ferramenta  clique nos pontos A, C, D – C, D, A e D, A, C, respectivamente, para marcar os ângulos do triângulo ACD. Ao realizar os passos, a ordem em que o ângulo é marcado, faz diferença quando o triângulo passa para o segundo quadrante.

Figura 39: Triângulo no segundo quadrante



Fonte: captura de tela da Atividade Correndo no ciclo trigonométrico do grupo B

Podemos ver que eles não aprofundam a discussão sobre os ângulos, os estudantes expõem suas observações, mas não concluem o que estão percebendo. Dessa maneira, eles deixam de lado observações como ângulos agudos, obtusos, relação dos ângulos e lados e classificações. Seguem para o próximo passo sem aprofundamento nesse.

Ciro:*vamos seguir*
Pitchu: *Lets que vamos*
Ciro: *como faço pra dar entrada?*
Ciro:*AD/AC*
Ciro: *enfim*
Ciro: *AD/AC é a tangente né*
Mediadora: *é?*
Ciro: *ah não*
Ciro: *minto*
Ciro:*AC é a hip*
Ciro: *mosquei*
Ciro: *enfim*
Ciro: *AD/AC é seno*
Ciro: *seo de alfa*
Ciro: *é o cateto oposto a alfa, pela hip*
Ciro: *certow*
Ciro: *?**
Pitchu: *É o cateto oposto*
Pitchu: *Sobre a Hip?*

Ao iniciar o próximo passo, podemos observar que os licenciandos tentam lembrar-se das nomenclaturas e relações trigonométricas do triângulo retângulo. Eu, como mediadora poderia ter entrado para intervir e explorar mais as colocações sobre relações trigonométricas, porém, um dos motivos para não saber atuar veemente é não saber no momento em que ponto estavam, pois estava acompanhando a atividade de quatro grupos, não intervi.

Mediadora: *e no ciclo trigonométrico?*
Pitchu: *Né*

Pitchu*: Seria o seno*
Mediadora*: isso no triângulo*
Mediadora*: mas como a gente pode olhar isso no ciclo?*
Pitchu*: Eita*
Pitchu*: Boa pergunta*
Ciro*: huuuuuuuuuuuuum*
Ciro*: eita*
Ciro*: tipo assim*
Ciro*: o b*
Ciro*: o b pode ser o complementar*
Ciro*: do coeficiente angulo de C*
Ciro*: correto?*
Ciro*: tipo assim*
Ciro*: o segmento de reta AC tem seu angulo ocmplementar*
Ciro*: o B, seria seu complementar, né?*
Yuumi*: isso*

Ao iniciar a discussão sobre o ciclo trigonométrico, os estudantes se mostraram com dúvidas e confusos com o que poderiam comentar e discutir sobre. Isso pode ter se dado pela falta de exploração sobre as relações trigonométrica propostas no momento anterior. Enquanto Ciro buscava alguns argumentos para formular uma resposta, Pitchu procurou por Dekin que estava presente durante toda a atividade, mas não participou de nenhuma discussão ou construção.

Pitchu:*ONde está o Dekin?*
Dekin*: estou aqui*

Não sabemos o motivo pelo qual ele não participou, podemos pensar nas seguintes hipóteses: Dekin estava realizando outra atividade no computador e não estava acompanhando; Dekin não sabia o que responder e preferiu apenas observar; Dekin achou a atividade pouco interessante e não quis participar; Dekin não achou a atividade necessária, pois segundo ele, já conhecia bem cada conceito trabalhado ou Dekin não acha benéfico o uso de tecnologias nas aulas de matemática e preferiu não participar.

Não discutir e compreender as relações métrica com o uso do GeGebra, aparentemente fez com que eles não avançassem na discussão sobre o ciclo Trigonométrico. Isso reforça a ideia de que para entender o que ocorre nas funções trigonométricas não precisa saber sobre o ciclo trigonométrico, por outro lado, as relações que podem ser estabelecidas entre o triângulo retângulo com o ciclo trigonométrico não ficaram claras e provavelmente isto tenha impossibilitado uma discussão sobre o ciclo trigonométrico.

Identificamos algumas ideias desconexas e que não conseguiram conjecturar conclusões sobre o que estão vendo. Implicando em falas de quem está pensando em como realizar uma conexão. Apenas Ciro fala e as falas são de pontos separados, ou seja, ele está tentando fazer a conexão. Nossa hipótese é de que cada tópico e as relações que podem ser feitas, não estão claras para o estudante.

> **Ciro:** *então*
> **Ciro:** *eu vi que to errado aqui*
> **Ciro:** *roubei*
> **Ciro:** *pois o coeficiente angular,*
> **Ciro:** *é cosseno*
> **Ciro:** *é o angulo inferior*
> **Ciro:** *verde*
> **Ciro:** *o y*
> **Ciro:** *ei lá o nome*
> **Ciro:** *o coeficiente é em relação ao eixo x*
> **Pitchu:** *Sim saquei*
> **Ciro:***1min*

Ao analisar essa atividade chegamos à conclusão de que pesquisas devem ser realizadas sobre a relação entre o ciclo trigonométrico e as relações trigonométricas.

Observe no quadro 6 uma síntese das impressões da autora e pontos que precisam ser esclarecidos, bem como algumas considerações sobre os ambientes que utilizamos para realizar cada atividade.

Quadro 6: Síntese da análise

<table>
<tr><th>Atividade</th><th>Impressões da autora</th><th>Pontos a serem esclarecidos</th><th>Considerações sobre o ambiente utilizado</th></tr>
<tr><td>Arrasando nas Razões</td><td>Essa atividade foi de grande valia para que os estudantes tivessem contato com atividades diferenciadas, nessa atividade os estudantes iniciaram o processo de escrever sobre observações realizadas.</td><td>No decorrer dessa atividade não surgiram pontos a serem esclarecidos. Nossos objetivos foram alcançados.</td><td>Atividade realizada em um laboratório com mesas dispostas de forma que os estudantes sentaram em grupo de frente um para o outro. Essa disposição propiciou uma melhor comunicação entre os estudantes e contato visual.</td></tr>
<tr><td>Ambientação no GeoGebra</td><td>Nessa atividade alguns estudantes escreveram frases semelhantes às frases observadas em sala de aula e/ou livros didáticos.</td><td>Tivemos dificuldade para perceber se os estudantes de fato escreveram sobre suas observações e manipulações ou se decoraram o que foi passado para eles em sala de aula em vivências anteriores.</td><td rowspan="2">O VMTcG possui um grande potencial para a realização de pesquisas em educação matemática (BRITO, 2022) nos dando a oportunidade de acompanhar a construção realizada em grupo em tempo real, bem como a comunicação via chat. Porém, percebemos em nossa pesquisa que o ambiente necessita de internet com uma qualidade muito boa, o que pode não ocorrer em escolas ou na casa dos estudantes. Logo, em nossa percepção, para a pesquisa é uma ferramenta</td></tr>
<tr><td>Ambientação no VMT</td><td>Não é recomendável realizar atividades com muitas pessoas na mesma sala. Os estudantes não conseguiram manter um trabalho em grupo ou um raciocínio para realizar a construção.</td><td>Nessa atividade percebemos a falta de conhecimento em construção geométrica por parte dos estudantes. Nos despertou a curiosidade de entender se construções geométricas é estudado na educação básica e como se dá esse estudo.</td></tr>
</table>

Entendendo Radianos	Analisando essa atividade percebemos que seria mais relevante modificar a tarefa e remover o passo e), pois o GeoGebra nos retorna imediatamente o resultado e para uma atividade investigativa não a tornaria tão interessante.	Não ficou claro para nós se todos os estudantes compreenderam o que é radiano. Dado que alguns ficaram sem entender o que estava ocorrendo durante a atividade.	excelente, mas para aplicar em aula ainda precisamos de alguns ajustes, tanto nas estruturas físicas do espaço escolar quanto de metodologias. Por esta razão, todas as atividades que fizeram uso do VMTcG, foram modificadas e orientadas para serem realizadas no software GeoGebra, GeoGebra online ou GeoGebra Classroom.
Correndo no ciclo trigonométrico	Os licenciados não conseguiram estabelecer relações ou conjecturar ideias sobre essas.	Não ficou claro se elles não entendem cada um dos tópicos abordados separadamente ou se apenas não conseguem estabelecer relações entre cada um deles.	
Estudando a função seno	Nessa atividade percebemos que os estudantes não conseguem relacionar as mudanças na lei de formação da função com o gráfico, por exemplo, ao somar um elemento no domínio o que isso implicaria no gráfico.	Gostaríamos de saber como eles percebem as demais mudanças, pois eles fixaram o ponto da origem e fizeram considerações sobre a função somente nesse ponto.	O software GeoGebra funcionou muito bem para essas tarefas, as ferramentas presentes que nos possibilita uma construção intuitiva existente no software facilitaram a realização de atividade até mesmo para os estudantes que não tinham costume de trabalhar com ele. Em duplas ou trios, os alunos conseguiram observar as transformações gráficas e realizar suas considerações. O ponto negativo se dá pela perca de processo de construção dos mesmos, já que eles não escreveram sobre.
Estudando a função seno e suas inversas	Essa atividade precisa de um pouco mais te atenção, pois os estudantes tiveram dificuldade em pensar o que era necessário para encontrar a função inversa, dado que a função seno não é bijetora.	Não ficou elucidado se os estudantes conhecem os conceitos básicos de funções, exemplo: que é domínio de uma função - dado que os estudantes responderam que o domínio da função inversa da função seno seria |π|, ou seja, o conjunto domínio possuiria apenas um único ponto apenas um elemento.	

Fonte: elaboração da autora.

Em relação as atividades realizadas individualmente e em grupo um ponto ficou bem evidente, os licenciandos escreviam mais sobre suas observações individualmente. Já nas atividades organizadas em grupo, percebemos que eles debatiam muito oralmente e escreviam menos, o que consequentemente, fez com que nós perdêssemos dados que poderiam contribuir para uma análise mais rica das atividades realizadas pelos licenciandos no campo de pesquisa. Assim, reforçando a necessidade de diversos meios de coletas de dados para uma análise mais detalhada e melhores resultados e desta forma poder gerar produtos que colaborem mais com o ensino deste tópico.

As ideias que surgiram da interação entre os licenciandos, muitas vezes partindo apenas de um licenciando, não foram detalhadas. Apresentavam confusão nas suas conjecturas. Na interatividade com os ambientes utilizados os participantes não apresentaram dificuldade, sugerindo a intuitividade dos ambientes que utilizam o GeoGebra, porém apresentaram dificuldade em manipular, descrever e analisar o conteúdo estudado.

Em vista do que foi mencionado anteriormente, elaboramos um Produto Educacional que poderá ser utilizado pelos professores e que vem a seguir.

CAPÍTULO 5 - O PRODUTO

Neste capítulo, apresentamos, em síntese, a organização do produto que consiste em um caderno de tarefas e está dividido da seguinte forma: apresentação das autoras, introdução e por fim as tarefas sugeridas com o objetivo, duração sugerida, dicas para cada uma delas e comentários sobre a aplicação no campo de pesquisa. Neste capítulo, as tarefas não apresentam espaços para respostas, assim como elas não se encontram destacadas para facilitar a reprodução delas pelo professor, diferente de como estão apresentadas no produto.

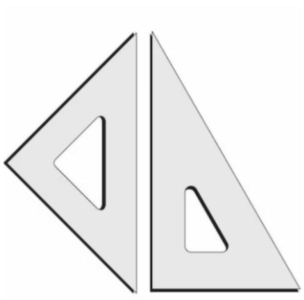
Na apresentação das autoras apresentamos um breve histórico sob sua formação e prática, na introdução apresentamos um breve histórico sobre a origem do caderno, a quem o produto se destinada, o tema e o objetivo.

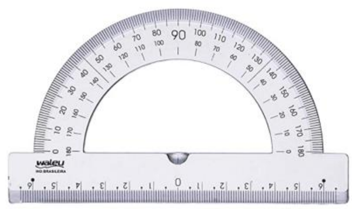
As tarefas são apresentadas de forma que o professor possa reproduzí-las e por isso são feitas em folha separadas com espaços para respostas dos respectivos alunos estando prontas para serem usadas em sala de aula. Entretanto, neste capítulo, as tarefas que compõe o caderno (produto educacional), não apresentam espaços suficientes para as respostas dos estudantes.

Tarefa - Arrasando nas razões

Parte I - Pegue seu par de esquadros, a régua e o transferidor. E vamos arrasar!

Par de esquadros **Régua** **Transferidor**





I - Medindo os lados dos esquadros A e B

Com a régua meça cada um dos lados dos esquadros e complete a tabela.

Esquadro A	Lado a	Lado b	Lado c
Medida dos lados			
Esquadro B	Lado a’	Lado b’	Lado c’
Medida dos lados			

1. O que você observa ao comparar as medidas dos lados do esquadro A?

2. O que observa ao comparar as medidas dos lados do esquadro B?

II - Medindo os ângulos dos esquadros A e B

Com o transferidor meça cada um dos ângulos dos esquadros e complete a tabela.

Esquadro A	ângulo a	ângulo b	ângulo c
Medida dos ângulos			
Esquadro B	ângulo a'	ângulo b'	ângulo c'
Medida dos ângulos			

3. O que você observa ao comparar as medidas dos ângulos do esquadro A?

4. O que você observa ao comparar as medidas dos ângulos do esquadro B?

5. O que você observar quanto a classificação das figuras geométricas representadas pelo par de esquadros em relação a seus lados e seus ângulos?

6. Existe algo que tenha sido interessante para você em suas anotações anteriores? Se sim, o quê?

Parte II - Comparando e relacionando as medidas dos esquadros

1. Preencha a tabela abaixo

	Medida de um dos catetos (a)	Medida do outro cateto (b)	Medida da hipotenusa (c)	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
Esquadro A					
Esquadro B					

2. As razões $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ possuem relação(ões) com quais elementos do triângulo? Explique essa(s) relação(ões).

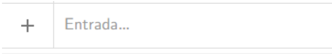
3. Você consegue identificar algum conteúdo matemático nas atividades que estamos realizando? Qual(is)?

4. O que você mudaria ou acrescentaria nessa atividade? Por quê?

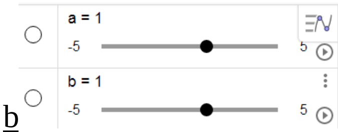
Tarefa - Ambientação no GeoGebra

Entre na sala virtual do GeoGebra Classroom com o código <inserir código> e siga as instruções.

Parte I – Analisando as funções.

a. Insira com campo de entrada 

a função f(x) = ax+b.

Dessa maneira, serão criados dois controles deslizantes a e b 

.

1. Qual o tipo de mudança ocorre no gráfico da função ao movimentar o controle deslizante a?

2. Qual tipo de mudança ocorre no gráfico quando movimentamos o controle deslizante b?

3. Quando o valor de a se torna negativo, por quais quadrantes o gráfico passa? O que isso pode significar?

b. Agora insira a função g(x)= ax²+bx+c no campo de entrada do GeoGebra e observe como os parâmetros interferem nas mudanças no gráfico da função. Utilize a tabela abaixo para o orientar nas observações.

4. Movimente cada controle deslizante criado e marque quais parâmetros interferem em cada item:

	a	b	C
Interseção com eixo x			
Interseção com o eixo y			
Concavidade			
Xv			
Yv			

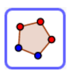
5. Comparando as transformações observadas em f(x) e g(x), escreva suas considerações sobre as regularidades encontradas.

Tarefa -Ambientação no GeoGebra

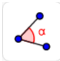
Entre na sala virtual do GeoGebra Classroom com o código <inserir código> e siga as instruções.

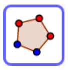
Parte II - Construindo triângulos.

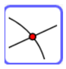
a. Crie dois pontos A e B com a ferramenta 

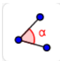
. Selecione a ferramenta  e clique nos pontos A e B, crie um polígono regular com 4 vértices.

b. Agora com a ferramenta  crie o segmento DB clicando nos pontos D e B.

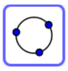
c. Com a ferramenta  selecionado clique nos pontos A, D, B – D, B, A e B, A, D. Dessa forma marcaremos os ângulos do triângulo ADB.

d. Crie dois pontos E e F, fora de ABCD e com a ferramenta  clique em E e em F para criar um polígono de 3 vértices.

e. Com a ferramenta  crie uma reta perpendicular ao segmento EF que passe pelo ponto G. Marque a interseção H da reta n com o segmento EF utilizando a ferramenta  clicando em EF e em n.

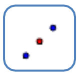
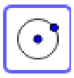
f. Agora com a ferramenta  marque ângulos clicando em H, G, F – G, F, H e F, H, G. Marcando os ângulos do triângulo HGF.

1. Que ferramentas podem ser utilizadas para a construção dos polígonos ABCD e HGF no papel? Você consegue descrever essa construção? Se sim, descreva-a.

g. Com a ferramenta  selecionada, clique nos pontos A, D, B, criando a circunferência c e em seguida com a mesma ferramenta clique em E, F, G, para criar a circunferência d.

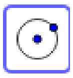
2. Podemos dizer que os polígonos 1 e 2 estão inscritos nas circunferências c e d, respectivamente?

h. Construa uma circunferência inscrita ao polígono ABCD. Seguindo os passos:

- Crie o segmento AC.
- Marque a interseção I dos segmentos DB e AC.
- Crie o ponto médio J entre A e B, com a ferramenta .
- Agora crie com a ferramenta  uma circunferência q de centro I e que um de seus pontos seja J.

2.Observando o que você construiu, disserte sobre as características presentes.

Tarefa - Entendendo Radianos

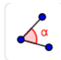
a) Com a ferramenta  selecionada crie os pontos A = (0,0) e B = (1,0). Agora selecione a ferramenta  para criar uma circunferência de centro A e que B seja um de seus pontos, clicando no ponto A e o no ponto B.

b) Crie um ponto C, sobre a circunferência de modo que não coincida com as interseções dessa com os eixos, utilizando a Ferramenta .

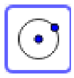
c) Agora selecione a ferramenta  para criar um arco circular.

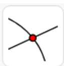
- Clique com o botão direito do mouse sobre o arco circular e selecione a opção "Configurações", selecione a aba "Cor" e mude para outra cor.

- Clique com o botão direito do mouse sobre o arco circular e selecione a opção "Configurações", selecione a aba "Básico" e modifique o tipo de rótulo para "Valor".

d) Marque o ângulo Â (*a*) clicando em B, A, C com a ferramenta .

1) Movimente o ponto C e observe, qual a relação do ângulo *a*, a circunferência, o raio da circunferência e o arco BC?

Crie uma nova circunferência de centro A e raio 2 – selecione a ferramenta  clique em A e na coordenada (2, 0) = D. Com a ferramenta  clique os pontos A e C para criar uma semirreta.

e) Marque a interseção E da reta com a circunferência de raio 2 utilizando a ferramenta .

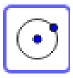
f) Crie um arco circular DE.

g) - Clique com o botão direito do mouse sobre o arco circular e selecione a opção "Configurações", selecione a aba "Cor" e mude para outra cor.

h) - Clique com o botão direito do mouse sobre o arco circular e selecione a opção "Configurações", selecione a aba "Básico" e modifique o tipo de rótulo para "Valor".

2) Movimente o ponto C e observe o ângulo *a*, o raio da circunferência e os valores dos arcos. O que podemos observar comparando esses valores?

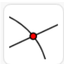
Tarefa - Correndo no Ciclo Trigonométrico

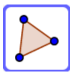
a) Com a ferramenta  selecionada crie os pontos A = (0,0) e B = (1,0). Agora selecione a ferramenta  para criar uma circunferência de centro A e que B seja um de seus pontos, clicando no ponto A e o no ponto B.

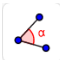
b) Crie um ponto C sobre o 1º quadrante da circunferência com a ferramenta .

c) Selecione a ferramenta  clique em C e em seguida no eixo das abcissas para criar uma reta f perpendicular ao eixo x, que passe por C.

Clique com o botão direito do mouse sobre a reta criada e selecione a opção "Configurações", selecione a aba "Estilo", clique em e escolha o estilo destacado: .

d) Marque a interseção D da reta perpendicular e o eixo x selecionando a ferramenta  e clicando na reta f e no eixo x.

e) Crie o polígono ACD com a ferramenta  clicando em A, C e D.

f) Utilizando a ferramenta  clique nos pontos A, C, D – C, D, A e D, A, C, respectivamente, para marcar os ângulos do triângulo ACD.

g) Movimente o ponto C, sobre a circunferência no 1º quadrante, utilizando a ferramenta .

1. Que observações podem ser feitas sobre os ângulos do triângulo ACD?

h) Crie um segmento AD, clicando em A e em D com a ferramenta  selecionada.

Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento g e selecione a opção "Configurações", selecione a aba "Cor" e mude para outra cor.

2. Qual o valor do segmento AC? E do segmento AD?

i) Insira no campo de entrada 

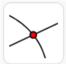
a divisão AD/AC.

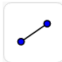
3. Qual a relação da razão AD/AC com o ângulo Â?

4. Movimente o ponto C sobre o 1º quadrante e observe o valor do segmento AD e a razão AD/AC. O que podemos concluir? E por que isso ocorre?

j) Selecione a ferramenta  clique em C e em seguida no eixo das ordenadas para criar uma reta h perpendicular ao eixo y, que passe por C.

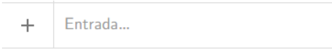
Clique com o botão direito do mouse sobre a reta criada e selecione a opção “Configurações”, selecione a aba “Estilo”, clique em e escolha o estilo destacado: .

k) Marque a interseção E da reta perpendicular e o eixo y selecionando a ferramenta  e clicando na reta h e no eixo y.

Crie um segmento AE, clicando em A e em E com a ferramenta  selecionada.

Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento i e selecione a opção “Configurações”, selecione a aba “Cor” e mude para outra cor.

6. Qual o valor do segmento AE?

Insira no campo de entrada 

a divisão AE /AC.

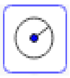
7. Qual a relação da razão AE/AC com o ângulo Â?

8. Movimente o ponto C sobre o 1º quadrante e observe o valor do segmento DC e a razão AD/AC. O que podemos concluir? E por que isso ocorre?

9. Como podemos generalizar suas conclusões para um ângulo qualquer? Ou seja, quando o ponto C está sobre outros quadrantes.

Tarefa - Chegando nas Funções Trigonométricas

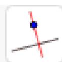
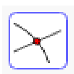
I - Construindo o Ciclo Trigonométrico.

a) Com a ferramenta  selecionada clique no centro A = (0,0) e crie um círculo de raio igual a 1.

b) Agora com a ferramenta  crie o ponto B = (1, 0).

c) Crie com a ferramenta , um ponto C qualquer, que diferente de B, sobre a circunferência.

d) Com a ferramenta  selecionado toque nos pontos B, A, C. Dessa maneira será formado o ângulo α.

e) Marque essa projeção utilizando a ferramenta  clicando no ponto C e no eixo y criando a reta f. Depois com a ferramenta , clique no eixo y e na reta f para criar o ponto D.

f) Utilize a ferramenta  para mover o ponto C.

1. Quando se move o ponto C, o que acontece com o valor do ângulo e a projeção do ponto C no eixo?

2. Quais relações podemos encontrar entre o ângulo e o seno desse ângulo? Explique.

3. Existe alguma forma de representar essa relação no plano cartesiano? Se sim, qual? Se não, por quê?

II – Chegando nas Funções

g) No campo de entrada

, insira o ponto E = (α, y(D)).

Observe o ponto E, e movimente o ponto C.

3. O que podemos afirmar sobre o ponto E?

h) Com o botão direito do mouse, clique no ponto E e marque a opção EXIBIR RASTRO.

Agora movimente o ponto C com a ferramenta  **.**

4. Descreva o rastro formado pelo ponto E.

Tarefa - Estudando a Função Seno

1. . Insira a lei geral de formação da Função Seno f(x) = a + b*sen(c+ dx), no GeoGebraObserve as transformações que podem ser feitas na Função Seno e responda explicando o que ocorre.

a) Ao mexer no controle deslizante **a** que transformações observamos no gráfico da função?
b) Ao mexer no controle deslizante **b** que transformações observamos no gráfico da função?
c) Ao mexer no controle deslizante **c** que transformações observamos no gráfico da função?
d) Ao mexer no controle deslizante **d** que transformações observamos no gráfico da função?

2. Ao modificar quais coeficientes temos uma mudança direta no domínio da função?

3. Quais são os coeficientes que modificam a imagem?

4. Existe(m) coeficiente(s) que modifica(m) tanto os valores do domínio quanto os da imagem da função?

5. Qual(is) coeficiente(s) promovem uma transformação isométrica no gráfico da função? Que transformação é essa?

Tarefa - Seno, Cossecante e Arco-Seno

1. Levando em consideração que a função Cossecante é a função inversa multiplicativa da função seno, insira no campo de entrada: f(x) = a + b*csc (c+ dx) e g(x) = a + b*sen(c+ dx).

Descrevam quais as mudanças observadas em ambas as funções e se essas mudanças são semelhantes ou não. Faça observações sobre.

2. Com base na Função Seno, no GeoGebra, descreva estratégias para que essa função tenha inversa (Arco-Seno).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção e entendimento de conceitos se fazem presentes nas discussões na área de Educação Matemática. Pesquisadores buscam metodologias e materiais com a finalidade de potencializar os processos de ensino e aprendizagem de matemática, tanto para alunos da Educação Básica quanto para alunos do Ensino Superior. As tecnologias tornaram-se ferramentas para realizar pesquisas e serem utilizadas em aula de Matemática.

A pesquisa que desenvolvemos prima pela utilização de Tecnologias em sala de aula alinhadas a materiais que geram a manipulação, observação e discussão de conceitos matemática buscando a formulação de conjecturas advindas dos estudantes. Estimulamos a interação dos estudantes e a interatividade dos mesmos com as tecnologias utilizadas.

A partir do exposto, nessa dissertação, discorremos sobre limitações, propostas e sugestões das atividades realizadas. No desdobramento dessa pesquisa nos deparamos com diversos desafios, o primeiro tange a existência de momentos totalmente virtuais - por conta da pandemia, e outros presenciais com ouso de Ambientes Virtuais.

Ressaltamos que nossa pesquisa teve quatro momentos diferentes: Discussão inicial com o primeiro grupo de licenciandos (de forma remota e síncrona); Curso de extensão para professores de matemática e licenciandos em matemática (de forma remota, com momentos síncronos e assíncronos); Estágio docente com um novo grupo de licenciandos (de forma remota) e o Campo de Pesquisa (presencial com o uso de Ambientes Virtuais). Em todos os momentos ocorreram discussões sobre o uso das tarefas na busca por refinamento e assim torná-las mais eficazes e eficientes como um material a ser utilizado por professores para o ensino de Funções Trigonométricas.

Nos momentos remotos, não era possível observar a linguagem corporal dos estudantes e, por essa razão, era necessário a maior descrição do que se pensava ou fazia para entendimento dos demais integrantes. Em contrapartida, os momentos presenciais nos deram a oportunidade de observar quais gestos eram realizados pelos estudantes. Porém isso não foi limitante, pois aprimoramos as tarefas com a finalidade de serem utilizadas em ambos contextos.

O segundo desafio observado durante este trabalho foi superar a falta ou a pouca existência de pesquisas sobre Funções Trigonométricas no levantamento que realizamos no Catálogo de Teses e dissertações da Capes, dificultando o estudo de resultados inerentes a esse público, em contrapartida, tal fato nos estimulou a realizar uma pesquisa sobre o tema envolvendo os licenciandos em Matemática.

Ainda convém lembrar que a metodologia de pesquisa escolhida – Design Basead Research, nos permitiu realizar modificações ao longo do processo no decorrer das aplicações das tarefas, procurando adequá-las ao público e à forma de interação (totalmente virtual ou presencial com uso de tecnologias). Em acordo com a nossa visão sobre educação e aprendizagem, essa metodologia prevê que o professor, o pesquisador e os pesquisados fazem parte de todo o processo, sendo, portanto, considerada interacionista.

A participação dos licenciandos foi essencial para preparar um material significativo para que pudéssemos perceber suas necessidades para a compreensão do tema considerando os diferentes aspectos envolvidos nele. Desta forma, a escolha do material a ser utilizado com alunos foi elaborada de tal forma que eles pudessem construir seus próprios significados tanto na sua relação com os dispositivos quanto através da interação com os demais integrantes do grupo. Segundo Bairral (2018),

> Um dispositivo de aprendizagem é construtivista se permite aos indivíduos produzirem seus próprios significados. Em um ambiente construtivista de aprendizagem, aprendizes podem trabalhar juntos e se apoiarem mutuamente, à medida que utilizam uma variedade de ferramentas e recursos mediáticos na busca para alcançar os objetivos das tarefas propostas (BAIRRAL, 2018, p. 21).

Para que a aprendizagem seja significativa ou para a aquisição de significado é preciso que o aluno manifeste disposição para a aprendizagem e que o material aprendido seja potencialmente significativo (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). E em princípio, os estudantes estariam dispostos a relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva visto que estavam inscritos numa disciplina que prevê discussões acerca do ensino de matemática para o Ensino Médio e que são licenciandos cursando os últimos períodos do curso. Dessa forma, acreditamos que um estudo futuro pautado na Aprendizagem Significativa de Ausubel pode vir a ser relevante para compreender como as associações são realizadas entre conceitos trigonométricos.

Todavia, o ambiente e os participantes interferem diretamente em como e em queo tema será discutido e abordado. Durante a pesquisa de campo alguns pontos não ficaram claros para nós, nos fazendo refletir sobre a necessidade de novas pesquisas para olhar mais de perto esses pontos. São eles:

- A compreensão sobre os conceitos básicos de Funções;
- A relação entre a representação gráfica e algébrica de Funções;
- Um estudo sobre trigonometria e ciclo trigonométrico.

Algumas ideias sobre Funções Trigonométricas surgiram e vimos que os licenciandos entendem de diferentes formas um mesmo conceito, as ideias que emergiram sobre Funções

Trigonométricas foram confusas e requerem mais investigações sobre o assunto. Alguns estudantes observam as Funções Trigonométricas tendo como base a ideia do plano cartesiano, enquanto outros no ciclo trigonométrico. Por estarem apoiados em diferentes conceitos, consideramos que isso pode ter dificultado a interação entre eles durante as atividades.

No decorrer das atividades, concluímos que a interatividade dos licenciandos com os Ambientes Virtuais utilizados – GeoGebra, GeoGebra Classroom e VMTcG, propiciou que os estudantes falassem um pouco mais sobre seus entendimentos através da observação de suas manipulações e relacionar com seus conhecimentos anteriores. Dos ambientes utilizados no decorrer da pesquisa, o único que não consideramos propício para o uso de sala de aula é o VMTcG, pois requer uma boa conexão com a internet que não é comum em instituições escolares. Apesar de, dentre os ambientes utilizados, ser o que possui melhores ferramentas para a pesquisa.

Em suma, nossos objetivos de identificar o conhecimento prévio dos licenciandos, elaborar tarefas e gerar um caderno de tarefas que fazem uso de Tecnologias Digitais sobre Funções Trigonométricas foram alcançados. Mas ressaltamos a necessidade de mais pesquisas sobre cada um dos tópicos abordados. Esperamos que com esse trabalho outros pesquisadores se interessem por pesquisar esse tema e que discutam Funções trigonométricas com futuros professores assim como existem trabalhos com foco em alunos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. O sentido do símbolo: atribuindo um sentido informal à matemática formal. In: ARCAVI, A. **Álgebra História Representação**, Rio de Janeiro, MEM/USU, 1995, Rio de Janeiro. p. 38-74.

ASSIS, A. R. de. **Alunos do ensino médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra**. 2020. 186 f. Tese (Doutorado em Educação, Contextos contemporâneos e Demandas Populares) - Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar de Nova Iguaçu, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica / Nova Iguaçu, 2020.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BAIRRAL, M. A. As Manipulações em Tela Compondo a Dimensão Corporificada da Cognição Matemática. JORNAL INTERNACIONAL DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, v. 10, p. 104-111, 2017.

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. **Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica**. Revista do Instituto GeoGebra São Paulo, v. 6, n. 2, 2017, p. 45-64. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/35378/24305. Acesso: 26/11/2019.

BAIRRAL, M. A.; MENEZES, R. O. (2023). **Elaboração e mapeamento de pesquisas com tecnologias**: olhares e possibilidades. In BAIRRAL, M. A.; MENEZES, R. O. (Eds.), doi:10.22350/9786559176779

BAIRRAL, M. A; SILVA, E. R. C. Ensino de Geometria e Tecnologias Móveis. In: BAIRRAL, M. A.; CARVALHO, M. (Org). **Dispositivos Móveis no ensino de matemática**: tablets e smartphones. São Paulo: LF, 2019, p. 29-42.

BORBA, M. C., SCUCUGLIA, R. R. S., GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRITO, C. de S.**. Licenciandos e professores de matemática interagindo no VMTcG em atividades de semelhança de triângulos.** 2022. 152 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2022.

CARVALHO, L. S. **Funções Trigonométricas e aplicações: Uma proposta didática para o Ensino Médio usando o GeoGebra**. 2020. 191 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, RN, 2020.

CHAVES, J. R. A. **A interatividade do GeoGebra no auxílio da compreensão da trigonometria** .2019. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2019.

COSTA, T. B. **Música e Funções Trigonométricas: Uma abordagem interdisciplinar.** 2019. 53 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, SP, 2019.

DE AZEVEDO, M. C.; PUGGIAN, C. ENSINO REMOTO E A PANDEMIA DE COVID-19: REFLEXÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA DA REDE ESTADUAL DE EDUCAÇÃO DO RIO DE JANEIRO. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 10, n. 3, 2020. Disponével em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/6925/3392> Acesso: 29/08/2023.

FERREIRA, A. L. S. **Trigonometria e funções trigonométricas, uma abordagem didático metodológica**. 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

FLORES, J. B.; DO ROSÁRIO LIMA, V. M. Educação em tempos de pandemia: dificuldades e oportunidades para os professores de ciências e matemática da educação básica na rede pública do Rio Grande do Sul. **Revista Insignare Scientia-RIS**, v. 4, n. 3, p. 94-109, 2021. Disponível em: < https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/RIS/article/view/12116/7812>. Acesso: 28/08/2023.

FREITAS, G. M. Q. **Trigonometria: Um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do *software* GeoGebra**. 2016. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, MS, 2016.

GARCIA, F. S. **Geogebra e o ensino de Funções Trigonométricas: Percepções dos estudantes do ensino médio**. 2021, 124 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2021.
GROSSA, Ponta Grossa, 2016.

GOMES, C. S; MOREIRA, L. S. **Desenvolvimento de recursos pedagógicos para estudo de trigonometria utilizando o software GeoGebra**. TCC (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia Fluminense. Campus Campos. Campos dos Goytacazes, RJ, 179. 2008.

GRAVEMEIJER, K., COBB, P. (2013). Design research from the learning design perspective. InT. Plomp&N.Nieveen(Eds.), Educational design research, PartA: Na introduction (p. 72-113). Enschede: SLO.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**, 3 : trigonometria. 9ª ed. São Paulo, Atual, 2013.

IEZZI, G; DOLCE, O; MACHADO, A. **Matemática e Realidade.** 10ª ed. São Paulo, Atual, 2021.

IEZZI, G; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**, 1: conjuntos, funções. 9ª ed. São Paulo, Atual, 2013.

IOCHUCKI, S. K. P. **Propostas para o ensino da trigonometria:introdução à aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométrico**s. 2016. 101 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA

JOYE, C.R.; MOREIRA, M.M.; ROCHA, S.S.D. **Educação a Distância ou Atividade Educacional Remota Emergencial**: em busca do elo perdido da educação escolar em tempos de COVID-19. Research, Society and Development, v.9, n.7, p.1-29, 2020

JUNIOR, F. R. S. **Ensino de Funções Trigonométricas com applets**. 2018. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

LIMA, E. L. **Análise Real**: Função de uma variável,vol 1, 13ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2020.

LOBO, R. D.; BAIRRAL, M. A. O Uso do GeoGebra na aprendizagem de limite. In: BAIRRAL, M. A. HENRIQUE, M. P. (Orgs). ***Smartphones* com toques da Educação Matemática**: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam. Curitiba: CRV, 2021, p. 181-202.

LORENZATO, Sergio. Para aprender Matemática. 3. ed. Autores Associados, 2010
MACHADO, M. M. **Geogebra: Uma proposta para o ensino de Funções Trigonométricas.** 2020. 184 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Goiás. Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Catalão, GO, 2020.

MARVILA, M. G. **Música e Funções Trigonométricas: Uma abordagem interdisciplinar.** 2019. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RJ, 2019.

MATTA, A. E. R; SILVA, F. de P. S da; BOAVENTURA, E. M. Design-Based Research ou Pesquisa de Desenvolvimento: Metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul./dez. 2014.

MELO, E. V. **Ensino-Aprendizagem de Funções Trigonométricas através do software GeoGebra aliado à Modelagem Matemática.** 2016. 153 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL. 2016.

MENESES, L. S. **Funções Trigonométricas ou Função Trigonométrica: Uma análise histórica e institucional no Ensino Médio.** 2019. 106 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Ilhéus, BA, 2019.

MISKULIN, R. G. S.; RICHT, A. Possibilidades didático-pedagógicas do software GeoGebra no estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral: Perspectivas na formação continuada de professores de matemática. **Anais da 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra**, 2012, p. 216-229. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/8384/6940. Acesso: 11/04/2023.

MOMETTI, A. L. **Reflexão sobre a Prática**: Argumentos e Metáforas no discurso de um grupo de Professores de Calculo. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC-SP. 2007.

NEVES, Evandro Marques das. Rigidez dos triângulos. 2014. 58 f. Dissertação(mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto deBiociências, Letras e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/115775>. Acesso em: 24/11/2021.

RANDOLPH, Justus (2009). A Guide to Writing the Dissertation Literature Review. Practical Assessment, Research & Evaluation: vol. 14, article 13. Disponívelem: https://scholarworks.umass.edu/pare/vol14/iss1/13 .

SALAZAR, D. M. **GeoGebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio**. 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/ Engenharia. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, Juiz de Fora, MG, 2015.

SANTIAGO, E. **O ensino da trigonometria usando o *software*GeoGebra como ferramenta de ensino-aprendizagem.** 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Vitória da Conquista, BA, 2015.

SANTOS, E. C.; MOTA, J F.; BRITO, A. B.; FERREIRA, R. D. A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência. **Anais da 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra**, 2012, p. 129-143. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/8434/6613. Acesso em 11/04/2023.

SILVA, H. L. **Estudo de funções trigonométricas em dois ambientes de aprendizagem no ensino médio**. 2017. 246 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Ilhéus, 2017.

SILVA, J. C. S. **As novas tecnologias no contexto escolar: uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em trigonometria.** 2015. 83 f. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

SILVA, T. F. **Uma sequência didática para o ensino de Funções Trigonométricas: Uma investigação sobre as contribuições do GeoGebra.** 2018. 141 f. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências e Matemática) — Universidade Franciscana Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS 2018.

SOUZA, L. M. S. de. **Uma proposta de estudo de funções trigonométricas e suas inversas através do geogebra.** 2015. 72 f. Dissertação (Mestrado) -Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, BA, 2015.

VERGILIO, J. S.; BAIRRAL, M. A. O smartphone como um recurso didático no ensino de Integral Definida. In: BAIRRAL, M. A. HENRIQUE, M. P. (Orgs). ***Smartphones* com toques da Educação Matemática**: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam. Curitiba: CRV, 2021, p. 203-224.

YIN, R. K. **Pesquisa Qualitativa do início ao fim**. trad. Daniel Bueno; revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

APÊNDICE A- QUADRO DE RESPOSTAS

Nome	O que você entende por Funções trigonométricas?	pré requisitos para entender Funções Trigonométricas	Ideias/ações presentes no texto escrito
Atuam em algum nível de ensino de instituições públicas			
Ciro	Uma forma alternativa de se estudar os eixos e analisar frequência.	Um sólido conhecimento de frequências, comprimento e trigonometria básica.	Plano cartesiano; medidas e suas comparações
Axe	são funções no qual utilizamos as propriedades do seno, cosseno e tangente.	ângulos e triângulos	relações trigonométricas
Atuam em instituições privadas			
Dekin *Atua no E.Médio*	Funções dentro do círculo trigonométrico	Conhecimento de funções e do círculo trigonométrico	Ciclo trigonométrico; conceito de função
Yuumi	Entendo como uma função clique trás um gráfico angular, essencial para o estudo geométrico, como principalmente triângulos.	O conhecimento sobre retas, ângulos, plano cartesiano, algumas fórmulas.	Ângulos; elementos de triângulos; plano cartesiano
Pitchu	São funções cujo a imagem delas são determinadas a partir de algum ângulo.	Entendimento básico do que são funções e ângulos.	Funções; ângulos
Yoda	Funções Angulares	Seno ; Consenso; Tangente ; Radianos ; Círculo trigonométrico	Ângulos; relações trigonométricas
Pedro *Atua no E. Médio*	Relações no plano cartesiano que são cíclicas, ou seja, se repetem. Variando, em seu domínio, entre -1 e 1.	Potência de Grau 2, Funções, Plano Cartesiano, Razão e Proporção, Ângulos e Retas	Plano cartesiano; funções, ângulos, relações trigonométricas
Não atuam em instituições de ensino			
Mengo	São funções que nos permitem calcular ângulos e períodos	Saber sobre ângulos, conversão e entender sobre sen, cos e tangente	Ângulos; relações trigonométricas
Jane	Funções angulares	Ângulos	Ângulos
Dre	Estudo de triângulos que relaciona ângulos com catetos e hipotenusa.	Conceitos básicos sobre ângulo e plano cartesiano	Triângulos; ângulos
Harry	Funções angulares	Ângulo, Círculo Trigonométrico, ângulos notáveis aplicados em seno, cosseno e tangente.	Ângulos; ciclo trigonométrico
Mel	São funções angulares	Noções de seno e cosseno, círculo trigonométrico.	Ângulos; ciclo trigonométrico
Mari	São funções que estão relacionadas os círculos trigonométricos e aos triângulos.	Seno, cosseno e tangente seria necessário para o início de funções.	Ciclo trigonométrico; relações trigonométricas; funções
Juju	São funções angulares	Seno, cosseno e tangente	Ângulos
Juca	São funções periódicas.	O conteúdo de ângulos.	Funções; ângulos

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO I

Estudando Funções Trigonométricas em Ambientes Virtuais

* Indica uma pergunta obrigatória

1. Você está ciente que este questionário faz parte de uma pesquisa de mestrado do Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

2. Você aceita fazer parte da pesquisa? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Ainda tenho dúvidas sobre a participação.

3. Escolha um nome para a sua identificação, com no máximo duas sílabas. *

____

4. Telefone celular (WhatsApp) *

____

5. E-mail? *

____

6. Está cursando licenciatura em Matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

7. Qual o seu período? *

____

8. Você atua na Educação Básica de Ensino na *

Marque todas que se aplicam.

- Rede pública
- Rede privada
- Não atuo

9. Atua em qual(is) ano(s) [série(s)]? *

____

10. Você estudou geometria no Ensino Fundamental II?Em caso afirmativo liste alguns dos conteúdos estudados. *

____

11. Você estudou Funções Trigonométricas no Ensino Médio? *

Marcar apenas uma oval.

- o Sim
- o Não

12. Você conhece algum software dinâmico que pode ser utilizado para o estudo de funções? Quais? *

____

13. Você já fez algum curso de GeoGebra? *

Marcar apenas uma oval.

- o Sim
- o Não

14. Quais são os pré-requisitos que você julga ser importantes para o estudo de Funções Trigonométricas? *

____

15. O que você entende por Funções Trigonométricas? *

____

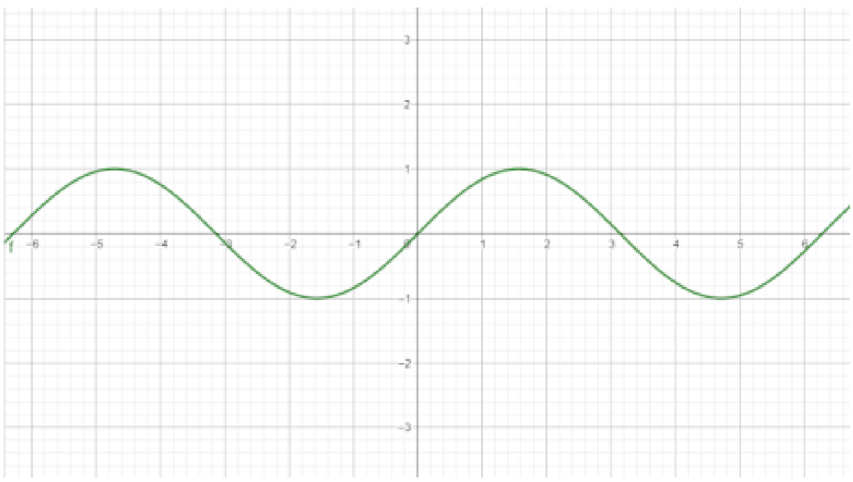
16. O que você espera das atividades? *

____

Identificando os gráficos

Nessa seção você irá relacionar a imagem dos gráficos com a sua lei de formação.

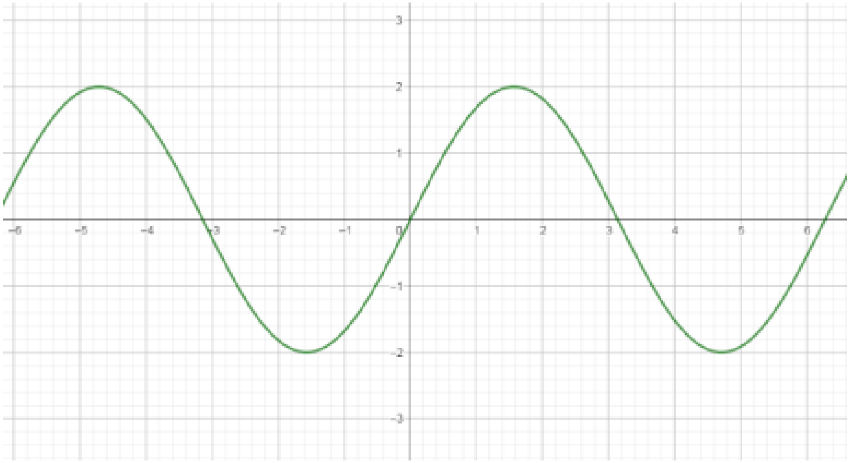
17. Gráfico 1 *



Marcar apenas uma oval.

- ○ f(x) = sen(2x)
- ○ f(x) = sen(x)
- ○ f(x) = sen(2x) +1
- ○ f(x) = cos(x)
- ○ f(x) = cos(x) - 1

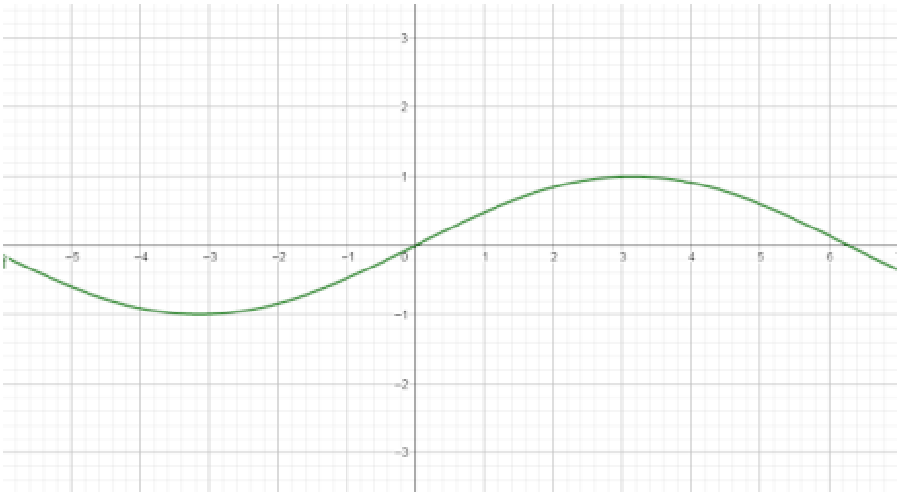
18. Gráfico 2 *



Marcar apenas uma oval.

- ○ f(x) = sen(x)
- ○ f(x) = cos(x) + 2
- ○ f(x) = 2sen(x)
- ○ f(x) = sen(2x)
- ○ f(x) = cos(x + 2)

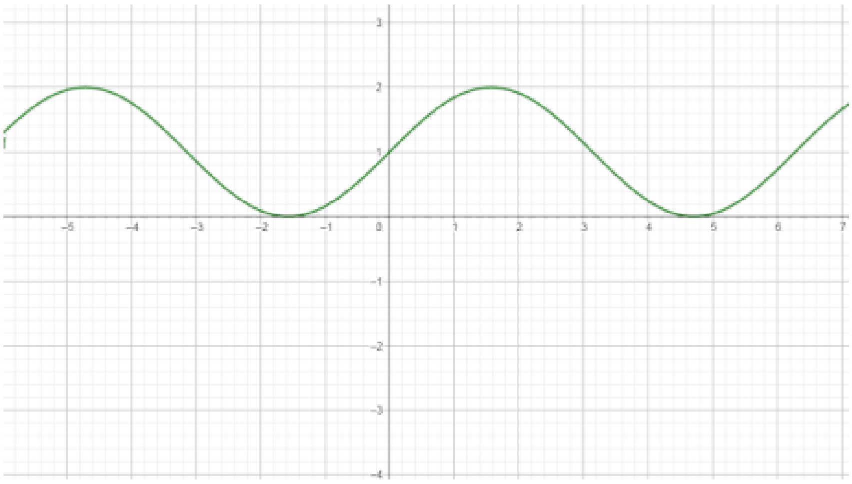
19. Gráfico 3 *



Marcar apenas uma oval.

- ○ f(x) = sen(x/2)
- ○ f(x) = sen(x + 2)
- ○ f(x) = sen(x) - 6
- ○ f(x) = 6sen(x)
- ○ f(x) = sen(x)

20. Gráfico 4 *



Marcar apenas uma oval.

- ○ f(x) = sen(x + 2)
- ○ f(x) = cos(x + 2)
- ○ f(x) = sen(x) + 2
- ○ f(x) = sen(x) + 1
- ○ f(x) = cosec(x + 2)

21. Descreva que estratégias você utilizou para chegar as respostas marcadas. Considerando os gráficos 1, 2, 3, e 4. *

____

Desenhando Funções

Agora, utilize um papel e um lápis para fazer um rápido esboço do que se pede.

22. Faça um esboço da Função Inversa da Função Seno, da Função Cossecante e da Função Arco-Seno. *

23. Você realizou consultas para responder esse questionário? Se sim, para qual(is) pergunta(s)? *

____