UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Trabalhando semelhança de triângulos com a dobradura do copo de origami

Vinicius Coelho Fialho

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

TRABALHANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS COM A DOBRADURA DO COPO DE ORIGAMI

VINICIUS COELHO FIALHO

Sob a Orientação do Professor
Luciano Vianna Félix

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre** no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Julho de 2025

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C438t

COELHO FIALHO, VINICIUS , 1986-
TRABALHANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS COM A DOBRADURA DO COPO DE ORIGAMI / VINICIUS COELHO FIALHO. - RIO DE JANEIRO, 2025.
76 f.: il.

Orientador: LUCIANO VIANNA FÉLIX.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PROFMAT, 2025.

1. GEOMETRIA. 2. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS. 3. ORIGAMI. 4. APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. 5. ENSINO MÉDIO. I. VIANNA FÉLIX, LUCIANO , 1986-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PROFMAT III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Seropédica-RJ, 29 de agosto de 2025.

VINICIUS COELHO FIALHO

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/08/2025

LUCIANO VIANNA FÉLIX Drº UFRRJ (Orientador- Presidente da Banca-Membro titular)

ORLANDO DOS SANTOS PEREIRA Drº UFRRJ (membro interno titular)

MICHAEL MACEDO DINIZ Drº UFSP (membro titular externo à Instituição)

ATA Nº ata/2025 - ICE (12.28.01.23)
(Nº do Documento: 4444)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 04/09/2025 14:20)
LUCIANO VIANNA FELIX
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###701#8

(Assinado digitalmente em 04/09/2025 15:09)
ORLANDO DOS SANTOS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###291#1

(Assinado digitalmente em 04/09/2025 21:37)
MICHAEL MACEDO DINIZ
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.858-##

*Visualize o documento original em https://sipac.ufrrj.br/documentos/ informando seu número: **4444**, ano: **2025**, tipo: **ATA**, data de emissão: **04/09/2025** e o código de verificação: **5c97e3a0d1***

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder saúde, força e sabedoria ao longo dessa caminhada. Sem Sua presença constante, nada disso teria sido possível.

À minha esposa, Luiza, por ser meu alicerce nos momentos de dúvida e cansaço. Obrigado por todo amor, paciência, incentivo e compreensão durante essa jornada. Sua presença foi fundamental para que eu pudesse seguir em frente com confiança e equilíbrio.

Aos meus filhos, que chegaram ao mundo justamente no final dessa trajetória acadêmica e marcaram o início de uma nova fase da minha vida. Duas novas vidas que iluminaram meus dias de uma forma que eu jamais imaginei ser possível. Vocês são minha maior motivação.

Agradeço também à minha família, pelo apoio incondicional e por sempre acreditarem no meu potencial, mesmo quando eu próprio vacilava. Vocês foram essenciais em cada etapa dessa conquista.

Ao meu orientador, pela orientação cuidadosa, pelas valiosas contribuições e pela confiança no desenvolvimento deste trabalho. Sua escuta atenta e incentivo constante fizeram toda a diferença.

Aos amigos e professores do PROFMAT, com quem compartilhei aprendizados, desafios e conquistas. Levo comigo não só o conhecimento adquirido, mas também as amizades e os momentos que tornaram essa trajetória mais leve e significativa.

A todos vocês, meu mais sincero agradecimento.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

RESUMO

FIALHO, Vinicius Coelho. **Trabalhando semelhança de triângulos com a dobradura do copo**. 2025. 70p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2025.

Este trabalho apresenta uma proposta didática para o ensino de conceitos geométricos, com foco na semelhança de triângulos e no Teorema de Tales, por meio da construção prática de um copo de origami. A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular em Angra dos Reis (RJ), utilizando uma abordagem qualitativa baseada em questionários diagnósticos (pré e pós-intervenção) e na observação de uma atividade prática. O referencial teórico fundamenta-se nas teorias de Van Hiele, David Ausubel e Lev Vygotsky, que defendem a importância da aprendizagem significativa, da mediação pedagógica e do desenvolvimento gradual do pensamento geométrico. A metodologia envolveu revisão teórica na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e do PRFMAT, aplicação da dobradura do copo, análise de resultados envolvendo questionário pré e pós aplicação do projeto e discussão coletiva com os estudantes. Os resultados indicaram um aumento na compreensão dos conceitos geométricos abordados, além de maior engajamento e participação ativa dos alunos durante as atividades. Conclui-se que o uso de dobraduras, especialmente o origami, constitui uma ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de geometria, promovendo uma aprendizagem mais significativa, interativa e contextualizada.

Palavras-chave: Geometria, Semelhança de Triângulos, Origami, Aprendizagem Significativa, Ensino Médio.

ABSTRACT

FIALHO, Vinicius Coelho. **Working with Triangle Similarity through the Cup Folding**. 2025. 70p. Dissertation (Professional Master's in Mathematics in National Network – PROFMAT). Institute of Exact Sciences, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2025.

This study presents a didactic proposal for teaching geometric concepts, focusing on triangle similarity and Thales' Theorem, through the practical construction of an origami cup. The research was conducted with second-year high school students from a private school in Angra dos Reis (RJ), using a qualitative approach based on diagnostic questionnaires (pre- and post-intervention) and the observation of a hands-on activity. The theoretical framework is grounded in the theories of Van Hiele, David Ausubel, and Lev Vygotsky, which emphasize the importance of meaningful learning, pedagogical mediation, and the gradual development of geometric thinking. The methodology included theoretical review, application of concrete materials, data analysis, and collective discussion with students. The results showed an increase in the understanding of the geometric concepts addressed, as well as greater engagement and active participation from the students during the activities. It is concluded that the use of paper folding, especially origami, is an effective pedagogical tool for teaching geometry, promoting more meaningful, interactive, and contextualized learning.

Keywords: Geometry, Triangle Similarity, Thales' Theorem, Origami, Meaningful Learning, High School Education.

Sumário

INTRODUÇÃO ___ ***6***

JUSTIFICATIVA ___ ***8***

ESTADO DA ARTE ___ *Erro! Indicador não definido.*

1. REFERÊNCIAL TEÓRICO ___ ***14***

1.1 VAN HIELE ___ **14**

1.2 DAVID AUSUBEL ___ **18**

1.2.1 TIPOS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ___ 20

1.2.2 APRENDIZAGEM SUBORDINADA, SUPEORDENADA E COMBINATÓRIA. ___ 21

2. UM BREVE HISTÓRICO SOBRE O ESTUDO DOS ÂNGULOS E DO ORIGAMI ___ ***23***

2.1. A GEOMETRIA E A SISTEMATIZAÇÃO DOS ÂNGULOS ___ **23**

2.2. HISTÓRIA DO ORIGAMI ___ **27**

3. NOÇÕES ESSENCIAIS DE GEOMETRIA PARA A PRÁTICA DO ORIGAMI ___ ***29***

3.1 UMA REVISÃO SOBRE O ESTUDO DOS ÂNGULOS ___ **29**

3.1.1 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO ___ 29

3.1.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS ___ 30

4. METODOLOGIA ___ ***32***

4.1 LOCAL E PÚBLICO ALVO ___ **32**

4.2 METODOLOGIA APLICADA ___ **33**

5. RECURSO EDUCACIONAL ___ ***35***

6. ANÁLISE DE RESULTADOS ___ ***49***

6.1 TESTE DIAGNÓSTICO ___ **49**

CONCLUSÃO ___ ***60***

REFERÊNCIAS ___ ***62***

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO PRÉ E PÓS APLICAÇÃO DO TRABALHO ___ **65**

INTRODUÇÃO

A Geometria, muitas vezes, é ensinada de forma mecanizada, centrada na memorização de fórmulas e na repetição de exercícios exaustivos. Essa abordagem tradicional leva à desmotivação dos estudantes, perpetuando a ideia de que a Geometria é uma disciplina tediosa e sem propósito prático. Para mudar esse cenário, propõe-se o uso de materiais concretos que estimulem os alunos, possibilitando que eles construam seus próprios conhecimentos por meio de uma abordagem mais dinâmica e interativa.

Preocupados com a falta de engajamento no ensino de Geometria, professores e pesquisadores vêm buscando alternativas que tornem o aprendizado mais atrativo e participativo. Fundamentados em teorias contemporâneas de aprendizagem, esses profissionais defendem a importância de o estudante atuar como protagonista na construção do saber, interagindo com materiais concretos de forma lúdica. O uso de ferramentas como o origami, por exemplo, proporciona uma experiência de aprendizagem prazerosa e significativa. Essa prática estimula a interação social, fomenta discussões e desperta o interesse pela disciplina, enquanto os alunos formulam conceitos e desenvolvem habilidades em um contexto que alia diversão e aprendizado.

A dobradura é uma excelente oportunidade para realizar experiências exploratórias. Por meio das dobras, os estudantes manipulam formas e participam ativamente da construção de modelos geométricos. Durante esse processo, é possível identificar elementos e propriedades fundamentais para o estudo da Geometria Plana, como ângulos e relações de área. Um exemplo prático é a dobradura do copo, que demonstra como figuras geometricamente distintas podem ter áreas iguais, enriquecendo o entendimento dos alunos.

Além disso, o origami, como arte de dobrar papel, oferece inúmeros benefícios. Ele não só aprimora a coordenação motora, mas também encanta e motiva pessoas de todas as idades. Por ser de fácil execução e baixo custo, o origami é uma ferramenta acessível que permite trabalhar conceitos geométricos em diferentes níveis de complexidade. Essa prática torna possível explorar formas simples e complexas, oferecendo aos estudantes um contato direto e concreto com os conteúdos.

Educadores têm utilizado o origami não apenas no ensino da Geometria, mas também como um recurso interdisciplinar devido às suas inúmeras possibilidades. Através da manipulação do material, os alunos participam ativamente da construção dos modelos, compreendendo estruturas geométricas por meio de experimentação e controle.

Essa abordagem facilita a formação de modelos mentais sólidos, reforçando o aprendizado, “O uso do origami como ferramenta para construções geométricas no ensino básico pode favorecer a compreensão de axiomas e problemas clássicos da geometria.” (PASSARONI, 2015).

Aliar o origami à teoria construtivista potencializa o processo de ensino, permitindo que o professor trabalhe os conteúdos em conjunto com a turma, enquanto os alunos constroem o conhecimento a cada dobra realizada. Essa combinação transforma o aprendizado em uma experiência divertida e inovadora, rompendo com o ensino tradicional e maçante. Nesse contexto, o professor do Ensino Fundamental e Médio desempenha um papel fundamental ao desafiar os alunos, tornando o ensino da Geometria mais interessante, dinâmico e de qualidade superior.

Por fim, a grande questão que se coloca é: como tornar o ensino de Geometria mais instigante e eficaz? A resposta passa por metodologias que valorizem a participação ativa do estudante, promovam a socialização do saber e estimulem a curiosidade, garantindo uma experiência educacional que realmente faça sentido para os alunos.

É possível mudar a mentalidade de que a matemática é entediante, sentimento compartilhado por muitos alunos que estão nos Ensinos Fundamental e Médio. Com material lúdico na sala de aula é possível trazer o aluno desinteressado pela matéria a um mundo novo, com muitas surpresas e curiosidades que, para Campos (2000)

> “Geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problema.” (CAMPOS, 2000, p. 15).

Este trabalho está dividido em seis capítulos. No capítulo 1 – Marco Teórico – São apresentadas as teorias educacionais de Pierre Marie Van Hiele e David Ausubel. No capítulo 2 - Marco Histórico - Contextualiza-se a evolução do estudo dos ângulos e dos origamis. No capítulo 3 - A Geometria e o Origami – apresenta o origami como uma ferramenta pedagógica eficaz para o ensino de geometria, destacando sua utilidade na construção de ângulos e na compreensão de conceitos como área e proporcionalidade. A partir da construção de um copo por meio de dobraduras, propõe-se demonstrar que a área do triângulo maior em uma de suas faces corresponde à soma das áreas de dois triângulos menores. Finalmente, o capítulo 4 - Metodologia – descreverá esta atividade tirando conclusões, capítulo 5 – Recurso Educacional e capítulo 6 – Resultados.

JUSTIFICATIVA

A geometria pode se tornar um verdadeiro desafio para muitos alunos principalmente quando nos aprofundamos nos conceitos sobre ângulos e, em consequência, semelhança de triângulos e suas propriedades. Esse aprofundamento aumenta a complexidade das construções geométricas e a visualização se torna um problema para a compreensão dos exercícios.

Os teóricos Van Hiele em *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education* de 1986, propõem os cinco Níveis de Pensamento Geométrico onde, no nível 3, enfatiza a importância da experiência direta e da exploração ativa na aprendizagem da geometria. Eles argumentam também que os alunos precisam manipular objetos geométricos, observar suas propriedades e experimentar as relações entre eles para desenvolver uma compreensão significativa.

Vygotsky argumenta na sua Teoria da Mediação que o aprendizado ocorre com a ajuda de ferramentas, ou signos culturais, como linguagem, símbolos, ferramentas e conceitos. Estes ajudam a internalizar o conhecimento e a compreender conceitos abstratos.

Piaget propõe na Teoria dos Estágios do Desenvolvimento Cognitivo a ideia dos Esquemas Mentais. Estes esquemas são descritos como estruturas mentais organizadas que os alunos utilizam para compreender os conceitos abordados. Conforme esses conceitos vão ficando mais complexos, a organização das ideias facilita a evolução do aluno na aprendizagem. Outra ideia é a Construção e Modificação, onde Piaget argumenta que esquemas mentais são construídos através da interação do aluno com objetos e materiais que fazem parte do seu cotidiano. À medida que aumenta essa interação com o mundo o aluno assimila novas informações e/ou aprofunda conhecimentos já aprendidos de forma mais ágil.

Pelos teóricos abordados é possível observar que a utilização de materiais concretos estimula o aluno a compreender conceitos abstratos e a internaliza-los de forma organizada, desenvolvendo assim o processo mental de percepção, memória, juízo e raciocínio.

REVISÃO DA LITERATURA

Para explorar temas que abordam dobraduras aplicadas ao ensino de semelhança de triângulos foram pesquisados trabalhos acadêmicos nacionais nas plataformas BDTD, CAPES e PROFMAT utilizando as seguintes palavras chaves: “dobradura geometria”, “origami geometria”, “origami triângulos”, “dobradura triângulos”, “triângulos semelhança”. Nas três plataformas a pesquisa das palavras chaves “origami triângulos” e “dobradura triângulos” se mostraram infrutíferas, tendo somente encontrado resultados nas palavras chaves restantes.

A pesquisa realizada nas plataformas acadêmicas revelou a existência de diversos trabalhos que abordam as palavras-chave mencionadas anteriormente, sendo que muitos deles obtiveram resultados satisfatórios. Para a seleção dos estudos mais relevantes, foram filtrados aqueles publicados nos últimos cinco anos, considerando temas mais próximos ao foco de interesse, especificamente a abordagem da semelhança de triângulos por meio da dobradura do copo. A partir desse critério, foram escolhidos 15 trabalhos para uma análise mais aprofundada.

A seleção foi realizada por meio da leitura dos resumos e dos sumários, priorizando aqueles que apresentavam maior alinhamento com o objeto de estudo. Ao final do processo, seis dissertações foram excluídas, seja por tratarem de conceitos geométricos muito básicos voltados para os anos iniciais, seja por enfocarem aplicações de dobraduras em conteúdos mais relacionados à geometria espacial. Além disso, outro critério de exclusão foi a repetitividade de objetivos entre os trabalhos, visto que muitos apresentavam propostas semelhantes, diferenciando-se apenas em pequenos detalhes, especialmente no que se refere à aplicação de atividades lúdicas e ao estímulo do interesse dos alunos.

CATEGORIA	AUTOR/TIPO	TÍTULO	INST.	ANO
Construções geométricas. Régua e compasso. Dobraduras	CORRÊA, Rosilene Pereira de Oliveira Dissertação	Construções Geométricas: uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras	UFJF	2020

	PASSARONI, Luiz Carlos de Souza Dissertação	Construções Geométricas: uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras	UERJ	2018
Geometria dinâmica, tecnologias digitais, educação matemática	SILVEIRA, Priscila Ferreira Dissertação	Explorando propriedades geométricas a partir de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica	UFRGS	2020
Dobraduras Interação com objetos, amadurecimento do pensamento intuitivo, dedutivo e interação. Van Hiele.	RIBEIRO, Celso Henrique Motta Dissertação	O uso de dobraduras como ferramenta de aprendizagem sobre quadriláteros notáveis na educação básica	UFBA	2021
	SILVA, Henrique José de Ornelas Dissertação	Construções geométricas com régua e compasso e dobraduras	UFV	2018
	GLOWECKI, Kenia Carla Belo Domingues Dissertação	Uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos	UFRPE	2018
	VICTÓRIO, Jonathas Raposo Soares Dissertação	Abordagens do origami e dobraduras no ensino de geometria	UFRJ	2018
	DOS SANTOS, José Everaldo Dissertação	A Utilização da Técnica de Origami (Dobraduras) como Estratégia Facilitadora para a Aprendizagem de Geometria no Ensino Fundamental	UNILAB	2020
Dinamização de atividades exploratórias em representações de	LEIVAS, José Carlos Pinto, et al Artigo	Recurso didático para ensinar geometria: o uso de dobras de papel para obter regiões poligonais/polígonos	UFMT	2018

regiões poligonais/polígonos				

ABORDAGENS DOS TRABALHOS ANALISADOS

Corrêa (2020) e Santos (2020) sugerem propostas de atividades de construções geométricas utilizando dobraduras, mostrando construções de bissetriz, triângulos equiláteros, construção dos pontos notáveis de um triângulo, etc, com o objetivo de levar aulas mais lúdicas e divertidas à sala de aula. Passaroni (2018) acrescenta a arte do origami sobre um conceito matemático com aplicação nos axiomas de Huzita e a proposta de aplicação desse conjunto de axiomas com a inclusão da circunferência no origami. Porém, os aspectos que foram considerados mais importantes nesse trabalho foram as construções de polígonos e demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo utilizando dobradura, além da solução de problemas envolvendo o conceito de área.

Silveira (2020) utiliza o aplicativo GeoGebra para simular dobraduras no ambiente digital utilizando-as para confirmar ou refutar conjecturas geométricas o que, segundo o próprio:

> "...contribuiu para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois, ao desenvolverem justificativas para as propriedades das dobraduras exploradas, apropriavam-se de conceitos e propriedades que emergiram da exploração das dobraduras…" (Silveira, 2020, p.4).

Ribeiro (2021) e Victório (2018) destacam a importância fundamental do papel do professor no processo de transformação da sala de aula, promovendo um ambiente dinâmico e interativo no qual os alunos deixam de ser meros observadores para se tornarem protagonistas na construção do próprio conhecimento. Nesse contexto, o professor atua não apenas como transmissor de conteúdos, mas como mediador do aprendizado, incentivando a curiosidade, a experimentação e a resolução de problemas de maneira ativa.

Dentro dessa perspectiva, o origami surge como um recurso pedagógico valioso, pois alia arte e matemática, proporcionando aos alunos uma experiência prática e visual na compreensão de conceitos geométricos e espaciais. A manipulação do papel e a execução de dobraduras estimulam o raciocínio lógico, a coordenação motora e a criatividade, tornando o aprendizado mais concreto e significativo. Dessa forma, o uso do origami em sala de aula evidencia como metodologias inovadoras podem transformar a forma como os alunos aprendem, destacando: "Nesse contexto, os materiais manipuláveis podem auxiliar no processo de aprendizagem, pois além de facilitarem a visualização de objetos, contribuem para aulas mais dinâmicas, divertidas e interativas…" (Ribeiro, 2021, p.8).

Silva (2018) e Glowecky (2018) falam sobre a utilização da régua e do compasso no auxílio de várias construções geométricas aplicadas ao origami, construções essas que permitiram um aprofundamento na compreensão das relações matemáticas presentes nessa arte. O emprego dessas ferramentas possibilitou a construção precisa de figuras geométricas fundamentais, como bissetrizes, mediatrizes, perpendiculares e polígonos regulares, servindo como base para a criação de dobraduras mais elaboradas.

Além disso, foram apresentados roteiros detalhados que demonstram a aplicação dessas construções geométricas no contexto do origami, permitindo que os praticantes sigam um processo lógico e estruturado para alcançar formas desejadas com maior exatidão, concluindo que:

> "não só contribuíram para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos educandos a partir das interações com os objetos, amadurecimento do pensamento intuitivo e dedutivo, como também favoreceram o desenvolvimento de competências relacionais e pessoais de cooperação, interação, envolvimento, atenção, comunicação e autonomia." (Glowecky, 2018, p.8).

Dos Santos (2020) adiciona a esse contexto a participação e interesse dos alunos onde comenta: "alunos que não tiveram interesse pelas aulas tradicionais, se integram mais e tiverem uma participação empolgada. Observou-se uma maior interação como grupo, e acabaram os desentendimentos em sala." (Dos Santos, 2020, p.8)

Leivas, et al. (2018), explorou o uso do papel como recurso didático, através de dobraduras específicas para dinamizar atividades exploratórias relacionadas à representação de regiões poligonais ou polígonos visualmente regulares, contendo de 3 a 11 lados. Foram elaboradas atividades investigativas com o objetivo de determinar as dimensões das tiras de papel que resultariam em regiões poligonais com áreas aproximadamente iguais. Além disso, foi analisado o tipo de material que melhor se adequava às construções e manipulações para obter figuras geométricas visual e esteticamente adequadas. Eles concluíram que os objetos feitos com papel pardo facilitaram a visualização, a identificação dos elementos das figuras e foram de baixo custo de produção.

CONCLUSÃO DO ESTADO DA ARTE

A utilização do origami como recurso didático na construção de conceitos geométricos se revela uma estratégia eficaz para tornar o aprendizado mais dinâmico e envolvente. Estudos e propostas pedagógicas indicam que a manipulação do papel, junto com a utilização de ferramentas matemáticas como régua, compasso e aplicativos digitais, favorece a compreensão de propriedades geométricas e amplia o pensamento lógico dos alunos.

Além disso, o uso de dobraduras na sala de aula proporciona um ambiente de aprendizagem interativo, no qual os estudantes deixam de ser meros observadores para se tornarem protagonistas no processo de construção do conhecimento. A abordagem lúdica do origami, conforme apontam diversos autores, não só estimula a criatividade e a coordenação motora, mas também promove um maior engajamento dos alunos, especialmente daqueles que demonstram desinteresse por metodologias tradicionais de ensino.

A aplicação de axiomas geométricos no origami, bem como a exploração de polígonos e propriedades matemáticas por meio das dobraduras, contribui para um ensino mais investigativo, permitindo que os estudantes desenvolvam habilidades de argumentação e resolução de problemas. Além disso, o uso de recursos digitais, como o GeoGebra, reforça a interatividade e permite validar conjecturas geométricas, aprofundando ainda mais o entendimento dos conceitos abordados.

Por fim, pode-se destacar o papel fundamental do professor nesse processo, atuando como mediador do conhecimento e incentivando a experimentação, a cooperação e a autonomia dos alunos. A integração de materiais manipuláveis, como o papel, demonstra ser uma estratégia acessível e de baixo custo, que não apenas facilita a visualização de conceitos matemáticos, mas também promove um ambiente de aprendizagem mais motivador e inclusivo. Assim, o uso do origami na educação matemática reafirma a importância de metodologias inovadoras que unem arte, criatividade e conhecimento científico para potencializar o aprendizado dos estudantes.

1. REFERÊNCIAL TEÓRICO

1.1 VAN HIELE

O casal de holandeses Dina Van Hiele e Pierre Marie Van Hiele desenvolveu sua teoria na década de 1950, na Universidade de Utrecht, sob a orientação de Hans Freudenthal. Motivados pela busca de novas abordagens para o ensino da Geometria, eles realizaram experimentos com crianças de 12 e 13 anos, utilizando o geoplano como ferramenta para a construção de figuras geométricas pelos alunos.

O modelo teórico dos Van Hiele destaca a importância da manipulação e da visualização de figuras geométricas, incentivando o uso de ferramentas como o geoplano, esquadros e compasso, além de outros métodos de representação. A ênfase na visualização geométrica proposta pelo casal está fundamentada em estudos baseados nas teorias gestaltistas, que valorizam a percepção e a organização visual como parte essencial do processo de aprendizagem.

Gestalt é um termo sem tradução direta para o português, utilizado para designar a teoria da visualização fundamentada na psicologia da forma. Essa abordagem estuda os fenômenos perceptuais humanos, com ênfase especial na visão. Seu objetivo é compreender como a percepção visual pode gerar efeitos variados em diferentes indivíduos, dependendo de fatores como contexto, experiência prévia e organização visual.

A teoria da Gestalt foi amplamente aplicada em diversas áreas, incluindo as artes, onde ajudou a interpretar como elementos visuais influenciam a experiência estética. Os principais pensadores dessa escola são Kurt Koffka, Wolfgang Köhler e Max Wertheimer, que desenvolveram conceitos centrais para entender a organização perceptual. (PEREIRA, 2005, pp.1-5).

A figura abaixo ilustra como a percepção visual pode ser interpretada de diferentes formas, dependendo da perspectiva do observador onde é visualizado um rosto feminino, quando se olha da esquerda para a direita e um homem tocando saxofone, quando se olha da direita para a esquerda.

(PEREIRA, 2005, p.2)

O modelo teórico proposto por Van Hiele oferece uma abordagem alternativa para o ensino da Geometria. Segundo os autores, o pensamento geométrico é desenvolvido em diferentes níveis de dificuldade, abrangendo tanto a compreensão quanto a construção dos conceitos geométricos. Esses níveis são organizados de forma sequencial, permitindo que os alunos avancem gradualmente na complexidade de seus raciocínios geométricos. De acordo com Lorenzatto, é por meio desses níveis que o pensamento geométrico é estruturado e fortalecido, favorecendo uma compreensão mais profunda dos conceitos e o desenvolvimento do raciocínio lógico relacionado à Geometria.

> “no nível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os alunos que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades); no nível seguinte (análise) os alunos conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas; no outro nível (ordenação), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente (inclusão) e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente. As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. Nos dois níveis seguintes estão aqueles que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos.” (LORENZATO, 1995, pp. 3-13)

O modelo de Van Hiele organiza o desenvolvimento do pensamento geométrico em cinco níveis sequenciais:

- **Nível 1 – Reconhecimento e Visualização**: Nesse estágio inicial, o estudante forma imagens mentais das formas geométricas por meio da visualização. Ele reconhece figuras como um todo, mas sem compreender suas propriedades ou relações.
- **Nível 2 – Análise**: Aqui, o aluno começa a observar e analisar as formas geométricas identificadas no nível anterior. Ele reconhece algumas propriedades e conceitos associados às figuras, embora ainda não estabeleça relações entre elas. As definições são apresentadas, mas o estudante ainda não tem domínio completo sobre elas.

- **Nível 3 – Dedução Informal**: Neste nível, o aluno começa a relacionar diferentes figuras geométricas com base em suas propriedades, percebendo que algumas propriedades decorrem de outras. Os conceitos são compreendidos, mas o processo dedutivo ainda não é completamente dominado.
- **Nível 4 – Dedução**: O estudante compreende o processo de demonstração das propriedades geométricas e é capaz de desenvolver suas próprias demonstrações. Ele consegue distinguir entre uma afirmação e sua recíproca, aprofundando seu entendimento das relações geométricas.
- **Nível 5 – Rigor**: Nesse último nível, o aluno atinge um entendimento abstrato da Geometria, sendo capaz de analisar e compreender geometrias não euclidianas e lidar com conceitos geométricos em um nível altamente teórico e formal.

A progressão entre esses níveis ocorre de forma gradual, com cada nível construindo sobre as habilidades e compreensões adquiridas no anterior.

Serrazina, afirma que o ensino de Geometria no primeiro ciclo, levando em consideração o nível do desenvolvimento do pensamento dos aprendizes, deve ter como preocupações ajudá-los

> “a progredir do nível visual para o nível de análise. Assim, eles devem começar a identificar, manipular (construir, desenhar, pintar, etc.) e descrever figuras geométricas. Devem desenhar quadros no geoplano e procurar retas paralelas e retas perpendiculares. Atividades como puzzles como o tangram que permite a construção de figuras geométricas, enriquecem a capacidade de visualização e de identificação das propriedades das figuras, favorecendo o progresso da aprendizagem.” (SERRAZINA, 1996, p.34)

Para Van Hiele, o ensino da Geometria deve seguir certas propriedades fundamentais que guiam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essas propriedades são:

1. **Sequencial**: O estudante deve progredir sucessivamente por todos os níveis, sem pular etapas. Cada nível serve como base para o próximo, garantindo uma evolução consistente no raciocínio geométrico.
2. **Lingüístico**: A linguagem simbólica e os conceitos específicos de cada nível precisam ser introduzidos de forma clara e adaptada ao estágio em que o aluno se encontra. Isso facilita a assimilação e a comunicação das ideias geométricas.
3. **Intrínseco e Extrínseco**: Os objetos e conceitos trabalhados em um nível servem como base para o desenvolvimento do nível seguinte. Assim, o aprendizado em cada etapa está intrinsecamente ligado ao progresso futuro.
4. **Avanço Dependente da Instrução**: O avanço nos níveis não é determinado pela idade do aluno, mas sim pela qualidade e pela adequação da instrução recebida.

O desenvolvimento ocorre de acordo com a exposição a experiências didáticas planejadas.

5. **Combinação Inadequada**: Se o curso e o aluno estiverem em níveis diferentes, isso pode comprometer o aprendizado. Quando a instrução não está alinhada com o estágio de desenvolvimento do estudante, surgem dificuldades no entendimento e no progresso.

Essas propriedades enfatizam a importância de uma abordagem estruturada e adaptativa no ensino da Geometria, promovendo um aprendizado eficiente e progressivo. (PEREIRA, 2005, p.5)

Nos estudos realizados pelo casal Van Hiele, foram identificados cinco estágios fundamentais no processo de aprendizagem dos níveis do pensamento geométrico. Esses estágios são:

1. **Informação**: Nesse primeiro estágio, o professor desenvolve atividades alinhadas ao nível da turma. Essas atividades levantam questões, estimulam hipóteses, promovem observações e introduzem o vocabulário específico do nível em estudo. É o momento inicial de interação entre os estudantes e o conteúdo.
2. **Orientação Dirigida**: O professor guia os alunos na exploração do material relacionado ao tópico de estudo. Essa orientação busca destacar as características e estruturas associadas ao nível, ajudando os estudantes a identificar propriedades específicas e padrões relevantes.
3. **Explicação**: Após as atividades, os alunos compartilham suas observações e percepções. Nesse estágio, ocorre a troca de informações e conhecimentos, permitindo que cada estudante expresse seu entendimento e aprenda com os colegas.
4. **Orientação Livre**: Esse estágio envolve atividades mais complexas, nas quais os alunos exploram diferentes métodos de resolução. A variedade de abordagens favorece o pensamento criativo e a consolidação do aprendizado, ao mesmo tempo em que estimula a autonomia.
5. **Integração**: Nesse último estágio, os alunos revisitam os tópicos estudados para consolidar os conceitos aprendidos. Ao integrar os conhecimentos adquiridos, eles desenvolvem uma visão geral e abrangente dos conteúdos geométricos.

Esses estágios, quando aplicados de forma estruturada, contribuem para o desenvolvimento gradual e eficiente do pensamento geométrico, respeitando o ritmo de aprendizagem dos alunos e favorecendo a progressão pelos níveis propostos no modelo teórico de Van Hiele. (PEREIRA, 2005, p.5)

A teoria de Van Hiele é amplamente reconhecida como uma das mais eficazes para a aplicação no ensino da Geometria, devido ao seu eficiente processo de aprendizagem e estrutura sequencial. No entanto, apresenta algumas limitações que devem ser consideradas na prática educacional.

Uma das restrições aparece no **Nível 3 - Dedução Informal**, onde não é possível utilizar formas visuais de maneira tão eficiente para exemplificar conceitos, o que poderia facilitar a compreensão dos alunos. Como nesse nível os estudantes ainda não possuem uma abstração mental plenamente desenvolvida, o entendimento dos conceitos pode se tornar desafiador.

Outra limitação é a falta de atenção à **heterogeneidade dos alunos**. A teoria parte de um pressuposto implícito de que todos os estudantes avançam de forma semelhante pelos níveis, mas, na prática, as diferenças nas capacidades cognitivas individuais não são suficientemente contempladas. Ignorar essas diferenças pode prejudicar o progresso dos alunos, um aspecto crítico dado que o avanço entre os níveis depende mais da instrução do que da idade ou maturidade.

Apesar dessas limitações, as contribuições de Van Hiele para o ensino-aprendizagem em sala de aula são significativas. Sua teoria ajuda a estruturar o desenvolvimento do pensamento geométrico e o processo cognitivo dos estudantes, sendo particularmente eficaz nos estágios iniciais, como o **Nível 1 - Reconhecimento e Visualização**, onde a construção de imagens mentais é essencial para o aprendizado. Essas contribuições tornam a teoria um marco importante no ensino da Geometria, embora ajustes e adaptações sejam necessários para lidar com suas limitações.

1.2 DAVID AUSUBEL

David Ausubel, em sua teoria da aprendizagem significativa, distingue dois tipos principais de aprendizagem:

1. **Aprendizagem Significativa**: Este é o conceito central de sua teoria. Trata-se de um processo em que o novo conhecimento é relacionado de forma substantiva e não arbitrária aos conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno. Isso ocorre quando o conteúdo é ancorado em ideias ou conceitos pré-existentes,

facilitando a compreensão e a retenção do conhecimento. A aprendizagem significativa permite que o estudante desenvolva novos conceitos a partir de uma base sólida de conhecimentos anteriores.

2. **Aprendizagem Mecânica**: Essa é considerada o oposto da aprendizagem significativa. Nela, o aprendizado ocorre de maneira isolada e sem conexão com o conhecimento prévio do aluno. Os novos conteúdos são memorizados de forma arbitrária, o que dificulta a retenção a longo prazo e limita a compreensão mais profunda.

Ausubel enfatiza que a chave para uma aprendizagem eficaz é a organização do conteúdo e sua interação com o conhecimento prévio do estudante. Ele acredita que o fator mais importante no processo de aprendizagem é o que o aluno já sabe, destacando a importância de identificar esses conceitos pré-existentes para utilizá-los como base para a construção de novos conhecimentos. (MOREIRA, 1982, p.20)

A aprendizagem significativa enfatiza que o educando deve compreender o propósito e o sentido do conteúdo que está sendo ensinado. Isso envolve a construção de significados a partir de conceitos, ideias, proposições, modelos e fórmulas apresentados no processo de ensino. Ao entender um conteúdo, o aluno realiza uma ancoragem cognitiva, conectando esse conhecimento aos conceitos que já domina, o que facilita o aprendizado de novos conteúdos e promove a formação de conclusões próprias.

Essa abordagem permite que o estudante interaja com situações reais do cotidiano, contextualizando o aprendizado e tornando-o mais relevante e aplicável. Com isso, o aluno assimila os conteúdos de maneira mais profunda e clara, desenvolvendo uma compreensão concisa dos conceitos e ideias apresentados. Essa base sólida de conhecimento o prepara para lidar com diversos métodos avaliativos com sucesso, demonstrando não apenas memorização, mas entendimento e capacidade de aplicação prática.

A aprendizagem significativa, segundo Moreira: (MOREIRA, 1982, p. 6).

> "processa-se quando o material novo, ideias e transformações que apresentam uma estrutura lógica, interage com conceitos relevantes e inclusivos, claros e disponíveis na estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados, contribuindo para sua diferenciação, elaboração e estabilidade. Essa interação constitui, segundo Ausubel (1968,p.37-38), uma experiência consciente, claramente articulada e precisamente diferenciada, que emerge quando sinais, símbolos, conceitos e proposições potencialmente significativas são relacionados a estrutura cognitiva a nela incorporados." (MOREIRA, 1982, p.4)

1.2.1 TIPOS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

David Ausubel distingue três tipos de aprendizagem significativa, que abrangem diferentes níveis de complexidade no processo de construção do conhecimento:

1. **Aprendizagem Representacional**: Este é o tipo mais básico de aprendizagem significativa. Envolve a atribuição de símbolos a significados, como objetos, eventos ou conceitos. Os símbolos passam a representar para o aluno o mesmo que seus referentes significam, estabelecendo uma associação direta. É a base para outros tipos de aprendizagem, pois permite que o aluno reconheça e compreenda os significados atribuídos a símbolos.
2. **Aprendizagem de Conceitos**: Neste tipo, os conceitos são representados por símbolos genéricos ou categóricos que correspondem a abstrações dos atributos essenciais de seus referentes. Embora possa ser considerada uma forma de aprendizagem representacional, a aprendizagem de conceitos vai além ao trabalhar com regularidades que descrevem eventos ou objetos. Essa forma de aprendizado é fundamental para desenvolver a capacidade de generalização e categorização, que são essenciais para a organização do conhecimento.
3. **Aprendizagem Proposicional**: Nesse nível, o objetivo é aprender o significado de ideias expressas em forma de proposições. Aqui, os conceitos são combinados de maneira lógica para criar significados mais complexos, que vão além da soma dos significados individuais das palavras ou conceitos que compõem a proposição. O foco está em compreender as relações entre os conceitos e o significado global das proposições.

Esses três tipos de aprendizagem trabalham juntos para promover um entendimento progressivo e integrado do conhecimento, desde a associação básica de símbolos até a compreensão profunda de ideias complexas.(MOREIRA, 1982, p.8).

Quando o conceito a ser aprendido não pode ser ancorado a algo que o aluno já conhece, o estudante, no primeiro contato com esse novo conteúdo, pode não conseguir entender o significado completo da matéria. Como resultado, ele não assimila verdadeiramente o conceito, mas apenas o decora, sem compreender seu real propósito. Esse tipo de aprendizagem, em que o foco está na memorização sem a devida compreensão, é denominado aprendizagem mecânica por Ausubel.

Um exemplo típico de aprendizagem mecânica é a memorização de pares de sílabas sem sentido, onde os estudantes simplesmente repetem as sílabas sem compreender qualquer significado subjacente. Da mesma forma, a simples memorização de fórmulas, leis e conceitos, sem a construção de um entendimento profundo, também pode ser considerada aprendizagem mecânica. Essa abordagem, embora permita a retenção temporária de informações, não promove uma compreensão duradoura ou a aplicação do conhecimento de maneira significativa. (MOREIRA, 1982, p.9).

Esta aprendizagem é comumente vista em estudantes que ainda não atingiram um determinado grau de maturidade para assimilarem determinados assuntos em questão, o que resulta em uma aprendizagem momentânea, passageira, que será utilizada apenas para realizar algum método avaliativo.

Ausubel, em contraste com a aprendizagem significativa, define "aprendizagem mecânica (rote learning) como sendo aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva sem ligar-se a conceitos subsunções[1] específicas." (MOREIRA, 1982, p.9).

1.2.2 APRENDIZAGEM SUBORDINADA, SUPEORDENADA E COMBINATÓRIA.

Na teoria de Ausubel, ele distingue três tipos de aprendizagem: subordinada, superordenada e combinatória, cada uma com diferentes formas de interação entre o novo conteúdo e a estrutura cognitiva pré-existente do estudante.

1. **Aprendizagem Subordinada**: Neste tipo de aprendizagem, o novo conhecimento é mais específico ou menos inclusivo, adquirindo significado por meio da subsunção, que é a conexão do novo conteúdo com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno. O novo conceito "entra" como um exemplo, uma ampliação ou uma variação de algo já conhecido. Existe uma relação de subordinação entre o novo material e o conhecimento pré-existente, ou seja, os novos conceitos são aprendidos dentro de um contexto já estruturado na mente do aluno. Esse tipo de aprendizagem permite que o estudante amplie e refine seu entendimento, incorporando novos conhecimentos de maneira significativa.
2. **Aprendizagem Superordenada**: Aqui o novo conhecimento é mais geral ou mais inclusivo do que os conhecimentos prévios. A aprendizagem superordenada ocorre quando conceitos mais gerais e inclusivos já estabelecidos na estrutura cognitiva do estudante são utilizados para ajudar na aprendizagem de conceitos

[1] A palavra "subsunçor" não existe em português; trata-se de uma tentativa de aportuguesar a palavra inglesa "subsumer". Seria mais ou menos equivalente a inseridor, facilitador ou subordinador.

mais específicos. Nesse caso, os conceitos gerais funcionam como superordenados, organizando e facilitando a compreensão de conceitos específicos, que são subordinados a esses conceitos mais abrangentes. Esse tipo de aprendizagem promove uma estrutura hierárquica de conhecimento, onde o conhecimento mais amplo e geral ajuda na compreensão de detalhes específicos.

3. **Aprendizagem Combinatória**: A aprendizagem combinatória envolve a aprendizagem de conceitos ou proposições que não têm relação de subordinação ou superordenação com outros conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno. Nesse tipo de aprendizagem, os novos conceitos ou proposições não podem ser aprendidos através da conexão com conceitos preexistentes, mas exigem novas estruturas cognitivas para sua assimilação. Esse tipo de aprendizagem é mais desafiador, pois o aluno precisa construir novas formas de organização e compreensão para integrar essas novas informações.

Esses três tipos de aprendizagem destacam diferentes formas de como o conhecimento novo interage com o conhecimento prévio, cada uma com suas particularidades e importância no processo de aprendizagem significativa. (MOREIRA, 1982, p. 159)

Os tipos de aprendizagens ausubelianas permitem um maior entendimento em relação a facilidades e/ou dificuldades que os alunos possam ter em determinados campos do ensino, observando que, em alguns casos, como nas dificuldades de se aprender um novo conhecimento, o discente pode ter tido uma aprendizagem não satisfatória fazendo com que seus conceitos cognitivos não se desenvolvam o suficiente para poder assim assimilar novas proposições que dependem de conceitos cognitivos pré-existentes. (MOREIRA, 1981, p.83).

2. UM BREVE HISTÓRICO SOBRE O ESTUDO DOS ÂNGULOS E DO ORIGAMI

Neste capítulo apresentaremos alguns marcos históricos do estudo dos ângulos, focando no seu desenvolvimento desde a civilização egípcia até a Idade Média, com base em autores como Kraishweskhi (1928; 1982), que detalha as contribuições de Tales de Mileto; em relatos históricos sobre Euclides e a sistematização da Geometria em Alexandria; e nas contribuições de astrônomos como Hiparco, Ptolomeu, Aryabhata, Brahmagupta, Bháskara e al-Battani (ibidem, p.6–23), que influenciaram o desenvolvimento da trigonometria e da medição de ângulos com graus e radianos. Num segundo momento, abordaremos os primeiros passos do origami no Japão e sua disseminação pelo mundo, conforme descrito por Ferreira (2001) e Kanegae (1988), que relatam desde seu uso cerimonial e religioso até sua popularização como forma artística e educativa.

2.1. A GEOMETRIA E A SISTEMATIZAÇÃO DOS ÂNGULOS

Antes mesmo da formalização dos conceitos geométricos, as civilizações antigas já utilizavam a Geometria como uma ferramenta essencial para diversas atividades cotidianas. Documentos de civilizações como a egípcia e a babilônica comprovam que esses povos possuíam conhecimentos avançados em áreas como o divisão de terras férteis ao longo dos rios, observação e previsão do movimento dos astros, e a construção de pirâmides e outros monumentos. Esses avanços indicam que havia uma necessidade crescente de um conhecimento geométrico mais estruturado, o que impulsionou o desenvolvimento formal da Geometria.

Por volta de 500 a.C., em Alexandria, Euclides foi nomeado o primeiro diretor de uma instituição conhecida como o Museu (ou Museu de Alexandria), fundada durante o reinado de Ptolomeu I. Essa instituição, localizada ao lado do palácio real, não era apenas um centro de estudos, mas também um complexo residencial, com salas de aula, conferências e a maior biblioteca do mundo na época. Euclides teve acesso a todo o vasto conhecimento contido nessa biblioteca e foi capaz de sistematizar e organizar toda a Geometria que havia sido desenvolvida por matemáticos anteriores.

O resultado dessa organização do saber foi a obra monumental de Euclides, o tratado “Elementos”, que consistia em 13 livros e compilava o conhecimento geométrico da época. Essa obra não apenas sintetizou os avanços geométricos já alcançados, mas também estabeleceu a base para o estudo da Geometria por séculos. A importância de "Elementos" foi tamanha que ele se tornou o principal livro-texto de Geometria durante toda a Idade Média e a Renascença, sendo utilizado por muitas gerações de matemáticos e estudiosos.

Outro grande matemático que sempre deve ser mencionado em textos sobre a História da Geometria é Tales de Mileto. Tales é descrito como grande mercador, estadista de visão e defensor do celibato, mas se é verdade pouco se sabe, pois são poucos os conhecimentos sobre sua vida, assim como suas obras que foram perdidas no tempo. Acredita-se que Tales conheceu astronomia e matemática no Egito, e na Babilônia, no reino de Nabucodonosor, quando teve contato com as primeiras tabelas e instrumentos astronômicos que o ajudaram a prever o eclipse ocorrido em 585 a.C.. Foi o primeiro a receber o título de “primeiro matemático” da história, graças a tentativa de organizar a Geometria de forma dedutiva.

Estudiosos acreditam que durante sua viajem a Babilônia, Tales desenvolveu sua obra mais importante, chamada “Teorema de Tales: um ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto” (KRAISHWESKHI, 1982, p.6) Ele desenvolveu outros teoremas como “um círculo é bissectado pelo diâmetro”; “os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais”; “os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes”; “se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então, eles são congruentes” e “os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais” (KRAISHEWESKHI, 1928, p.6).

A Tales também são atribuídas as primeiras descobertas reconhecidamente matemáticas, considerando que, antes dele, a matemática era integrada a outras áreas do conhecimento, como a astronomia, e ainda não se consolidava como uma ciência autônoma. Acredita-se que Tales morreu aos 78 anos de idade em Atenas. Mais tarde Aristóteles comentou sobre ele dizendo: “para Tales a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos”. (ibdem. P.8).

Os sumérios e os egípcios construíam muitos campos de colheita e edifícios na forma retangular o que obrigava seus arquitetos a construírem ângulo de 90º que eram construídos com a seguinte técnica: cravam duas estacas na terra e traçavam entre elas um segmento de reta, que eram construídos com um compasso primitivo onde dois arcos de circunferências formadas pelas cordas se cortam e determinando dois pontos que, quando unidos, formavam com o segmento de reta traçado um ângulo reto.

A demanda por unidades de medida mais uniformes e precisas aumentou à medida que essas civilizações passaram a construir estruturas maiores e mais complexas. Adotaram então medidas que possuíam relações com partes do corpo humano, geralmente do rei, como o braço, o palmo, de modo que se construíam réguas de madeira ou cordas com nós, sendo as primeiras unidades de medida em relação a comprimento. Em relação a ângulos a necessidade de uma unidade de medida só foi solucionada mais tarde. (ibdem, p.9).

Não se sabe se o conceito de medida de ângulo foi desenvolvido pelos gregos ou se eles aprenderam este conceito através do contato com a civilização babilônica, mas é conhecido que foram os gregos que desenvolveram as relações entre ângulos ou arcos em uma circunferência e a determinação do comprimento de suas cordas.

No Egito, mais precisamente em Alexandria, o astrônomo e matemático Hiparco foi quem dividiu a circunferência em 360 partes (hoje chamados de graus) e o diâmetro foi dividido em 120 partes e cada uma dessas divididas em 60 porções (hoje chamadas de minutos) e essa por sua vez dividida em 60 partes (hoje chamadas de segundos).

Ptolomeu, por volta da mesma época, construiu uma tabela de cordas de uma circunferência para ângulos que variam de meio em meio grau de 0º a 180º e inscreveu polígonos regulares de lados 3, 4, 5, 6, 10 num círculo, possibilitando assim a construção de ângulos de 36º, 60º, 72º, 90º e 120º. (ibdem, p.20).

Posteriormente, os astrônomos e matemáticos sentiram a necessidade de uma nova unidade de medida para os ângulos, o que levou à criação do radiano. O radiano, nomeado a partir de "radian" em latim, surgiu para substituir a antiga terminologia associada a π, que antes era chamada de "π-medida", "circular" ou "medida arcual". O radiano, como nova unidade de medida angular, se consolidou devido à sua relação direta com a circunferência de um círculo, facilitando o trabalho matemático e astronômico.

Com a introdução do radiano, os astrônomos voltaram sua atenção para os avanços trigonométricos desenvolvidos pelos hindus, cujos trabalhos começaram a revolucionar os conhecimentos astronômicos da época. Até então, a principal fonte de conhecimento astronômico era a obra de Ptolomeu, intitulada "Almajesmo", que foi amplamente utilizada até o século XVI. No entanto, com o crescente comércio romano no sul da Índia, as ideias matemáticas gregas e babilônicas começaram a ser disseminadas, e os hindus começaram a produzir trabalhos de grande relevância científica.

Um dos textos mais importantes dessa época foi o “Surya Siddhanta”, escrito por volta dos séculos IV ou V d.C. Esta obra não apenas tratava de astronomia, mas também trazia a tábua de senos mais antiga conhecida. Embora o conteúdo incluísse os senos, o texto era marcado pela falta de provas rigorosas ou explicações detalhadas, mesmo demonstrando um grande conhecimento matemático.

Foi com o indiano Aryabhata, por volta de 500 d.C., que o conceito de seno de um ângulo apareceu pela primeira vez de forma concreta. Aryabhata produziu um trabalho que incluía tabelas que envolviam metade de cordas, chamadas de “jivas” (meia-corda em hindu), as quais mais tarde foram conhecidas como seno (do latim sinus, que significa seio, curva, ou volta). Em 628 d.C., Brahmagupta reproduziu essas tabelas, e, em 1150, Bháskara desenvolveu um método mais detalhado para calcular o seno de qualquer ângulo, consolidando ainda mais a trigonometria como uma ferramenta fundamental para a astronomia e matemática. (ibdem, p.22)

Durante um período, os matemáticos e astrônomos árabes ficaram em dúvida sobre qual sistema utilizar para a medição de ângulos: o Almajesmo de Ptolomeu ou a Trigonometria desenvolvida por Aryabhata. A dúvida foi finalmente resolvida entre os anos de 850 e 929, quando o matemático árabe al-Battani adotou a trigonometria de Aryabhata. Al-Battani introduziu o conceito de círculo unitário, com raio igual a 1, que foi uma inovação crucial para o desenvolvimento da trigonometria. Essa introdução do círculo unitário permitiu uma abordagem mais prática e universal para o estudo dos ângulos, especialmente no cálculo das funções trigonométricas.

Foi nesse contexto que a expressão "função seno" começou a ser amplamente utilizada. Al-Battani também contribuiu para o desenvolvimento de outras funções trigonométricas, como o cosseno e a tangente, que foram moldadas de maneira semelhante, facilitando o uso de ângulos e suas relações dentro da Geometria e outras áreas da matemática. Essas funções trigonométricas revolucionaram o estudo da Geometria e, ao longo do tempo, influenciaram profundamente o desenvolvimento da matemática e da ciência no mundo árabe e além. (ibdem, pp.22-23).

2.2. HISTÓRIA DO ORIGAMI

A exata origem do origami é desconhecida, mas alguns especialistas acreditam que tenha surgido pela disseminação do papel e por crenças religiosas de épocas remotas. Também é desconhecido o criador de muitos origami, visto que para se chegar a forma final, seus passos eram desenvolvidos por várias pessoas diferentes, impossibilitando algum registro. (FERREIRA, 2001, p.1)

Embora não se conheça o autor, sabe-se, no entanto, que foi no Japão que se desenvolveu, apesar de se encontrar em outros países, sendo o origami até hoje compreendido em todo mundo.

As primeiras expressões do que hoje chamamos de origami cerimonial surgiram após a introdução da fabricação de papel no Japão, levada por monges budistas (provavelmente no século VI), permitindo o surgimento de dobraduras com finalidades religiosas e decorativas. A partir disso novas dobraduras foram criadas e aos poucos o origami se desenvolveu, embora inicialmente fosse utilizado somente em cerimônias religiosas para transmitir ou registrar a intenção religiosa da cerimônia. Nessa época o origami não se prendia só na dobra do papel. Alguns trabalhos eram necessários o cortar o papel para realizar as dobraduras, o que mais tarde foi separado em outra categoria de dobradura que recebeu o nome de “kirigami”.

> "Os katashiro são, ainda hoje, colocados nos templos xintoístas no lugar da divindade, tomando a sua forma. O mais antigo katashiro de origami se encontra no Ise Jingu, província de Mie, portanto se diz que a história do origami é tão antiga quanto a história do Japão."(KANEGAE,1988,p.53).

“Noshi” era outra utilização do papel nas artes japonesas, enfeite feito de papel colocado no embrulho de um presente que significava sorte e fortuna para o presenteado. Os japoneses acreditavam que o branco era sagrado e por isso os presentes deveriam ser embrulhados com papel dessa cor, sendo muitas vezes impossível, por isso o noshi foi criado para representar o branco. (ibdem, p.1)

O origami até então era uma atividade formal, utilizada apenas em cerimônias religiosas ou para enfeitar presentes. Na Era Heian, 794 - 1192, um origami mais informal começou a se desenvolver com formas que variavam de garças a barcos e bonecas, passando a ser um passatempo divertido muito utilizado por samurais e por nobres. As classes mais pobres não tinham acesso pois a matéria prima era muito cara. Com o passar do tempo a fabricação do papel no Japão foi aumentando e aos poucos se tornando acessível a classes mais baixas que passaram a conhecer e aprimorar o origami passando os conhecimentos de pai para filho. Mas somente na Era Edo, 1590 – 1868, as mulheres e crianças passaram a também utilizar o origami independente de sua classe social. No final desta era já existiam mais de 70 tipos de origami entre eles o “tsuru” (cegonha), íris, sapo, lírio cesta, navio, balão, dentre outros. (ibedem, p.2)

Durante a Era Meiji (1868–1912), o origami japonês passou a sofrer grande influência do método de dobradura alemão. Isso ocorreu porque o origami, embora tradicionalmente associado ao Japão, também foi desenvolvido em outros lugares, como Alemanha e Espanha — neste último, introduzido pelos mouros. No Ocidente, as dobraduras evoluíram com ênfase em formas geométricas, em contraste com o estilo japonês, de provável origem, que era mais figurativo, representando pássaros, flores, pessoas, entre outros elementos.

Vale destacar o intercâmbio cultural entre japoneses e ingleses no século XVIII, quando um grupo japonês realizou uma apresentação na Inglaterra, demonstrando, entre outras técnicas, a famosa dobradura do tsuru.

O origami ficou conhecido em todo mundo, após um grande intercâmbio após a Primeira Grande Guerra. O Japão o eliminou das aulas alegando que eram atividades não-didáticas. Hoje em dia existe uma discussão para a volta do origami às salas de aula, mas ficou apenas restrito a atividades familiares. (ibdem, p.2)

3. NOÇÕES ESSENCIAIS DE GEOMETRIA PARA A PRÁTICA DO ORIGAMI

Neste capítulo, serão explorados conceitos fundamentais da geometria plana que embasam a prática da construção de figuras por meio de dobraduras. Inicialmente, abordaremos a soma dos ângulos internos do triângulo, que é sempre igual a 180°, independentemente do tipo de triângulo, princípio essencial para diversas demonstrações e cálculos geométricos. Em seguida, apresentaremos o Teorema de Tales, destacando a proporcionalidade entre segmentos formados por retas paralelas cortadas por transversais e a classificação dos ângulos gerados nessas situações. Por fim, discutiremos a semelhança de triângulos, um conceito que relaciona ângulos congruentes e lados proporcionais, identificado por meio de critérios específicos, e que possibilita aplicações práticas como a medição indireta de alturas e a construção de maquetes em escala. Esses tópicos fornecem a base teórica necessária para compreender e aplicar os procedimentos desenvolvidos ao longo do capítulo.

3.1 UMA REVISÃO SOBRE O ESTUDO DOS ÂNGULOS

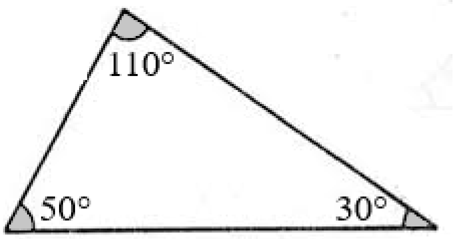
A seguir apresentaremos os conceitos matemáticos que serão abordados na nossa prática, entre eles: soma dos ângulos internos do triângulo e semelhança de triângulos.

3.1.1 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO

A soma dos ângulos internos de um polígono é um conceito fundamental da geometria plana e permite calcular a medida total dos ângulos dentro de qualquer figura fechada com lados retos. A fórmula geral para encontrar essa soma em um polígono com “n” lados é:

$$S = (n-2).180°$$

Essa fórmula se baseia no fato de que qualquer polígono pode ser dividido em triângulos. Como cada triângulo tem soma interna de 180°, basta contar quantos triângulos cabem dentro do polígono ao traçar diagonais a partir de um vértice.
Especificamente no caso do triângulo, que é o polígono mais simples com 3 lados, a soma dos ângulos internos é sempre: 180^0.



Isso significa que, independentemente do tipo de triângulo (equilátero, isósceles ou escaleno), a soma de seus três ângulos internos será sempre igual a 180°. Por exemplo, em um triângulo equilátero, cada ângulo mede 60°, pois $3 \times 60^{o} = 180^{0}$. Já em um triângulo retângulo, um dos ângulos mede exatamente 90°, e os outros dois completam os 90° restantes.

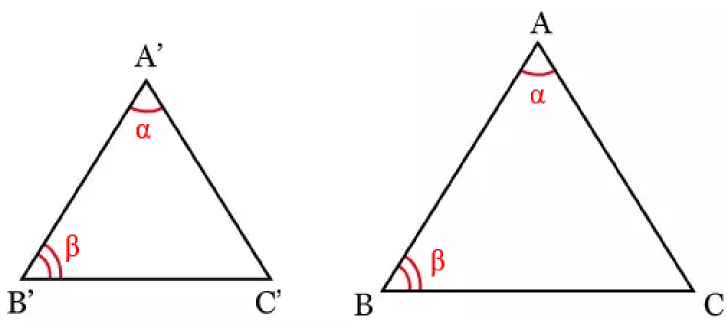
Esse princípio é amplamente usado para resolver problemas que envolvem a determinação de ângulos desconhecidos em triângulos e outros polígonos, sendo também a base para muitas demonstrações e construções geométricas.

3.1.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

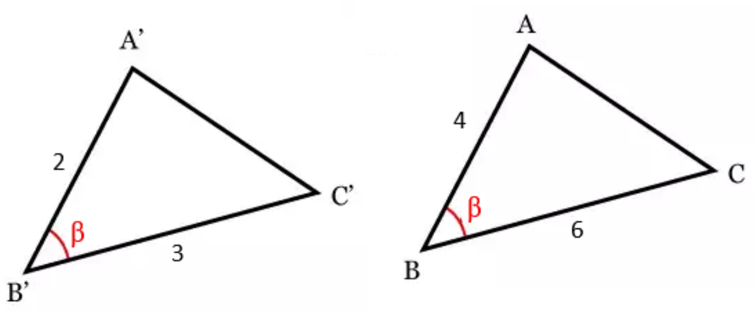
A semelhança de triângulos é um conceito da geometria plana que se refere à comparação entre dois triângulos com a mesma forma, embora possam ter tamanhos diferentes. Dois triângulos são considerados semelhantes quando possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes iguais ou proporcionais. Isso significa que as medidas dos lados podem variar, mas as proporções entre eles se mantêm constantes.

Para identificar se dois triângulos são semelhantes, utiliza-se três critérios principais: o critério AA (ângulo-ângulo), o critério LAL (lado-ângulo-lado) e o critério LLL (lado-lado-lado).

- O critério AA afirma que, se dois ângulos de um triângulo forem congruentes
- a dois ângulos de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

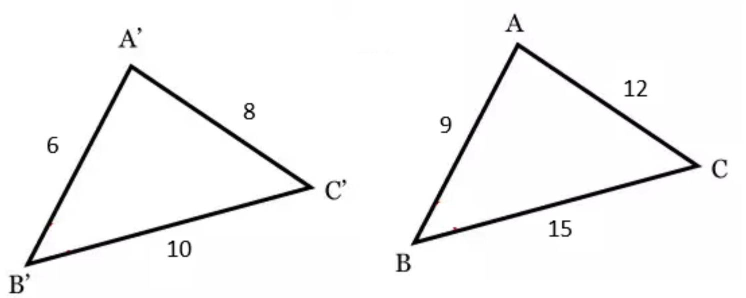


- O critério LAL garante a semelhança se dois lados de um triângulo forem proporcionais aos dois lados correspondentes de outro triângulo e o ângulo formado entre eles for congruente.



$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}\ e\ A'\widehat{B'}C' = A\hat{B}C$$

- O critério LLL assegura a semelhança quando os três lados de um triângulo forem proporcionais aos três lados correspondentes de outro triângulo.



Por exemplo, se temos dois triângulos onde um possui lados medindo 6, 8 e 10 cm, e o outro possui lados medindo 3, 4 e 5 cm, percebemos que os lados do segundo triângulo são exatamente metade dos lados do primeiro: $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$. Como a razão entre os lados correspondentes é a mesma (neste caso, 2), estes triângulos são semelhantes pelo critério LLL.

A semelhança de triângulos é uma ferramenta muito útil em diversas situações práticas, como na medição de alturas inacessíveis (como prédios ou árvores), construção de maquetes e mapas em escalas. Quando dois triângulos são semelhantes, é possível usar a razão de semelhança para calcular medidas desconhecidas de lados ou ângulos, o que torna essa propriedade bastante poderosa na resolução de problemas geométricos.

4. METODOLOGIA

4.1 LOCAL E PÚBLICO ALVO

A instituição escolhida para a realização do trabalho foi a Cooperativa Educacional César Almeida (ACEC) em Angra dos Reis, no estado do Rio de Janeiro, em uma turma de 14 alunos do 2º ano do Ensino Médio, das 8 horas até ás 09 horas e 40 minutos do dia 19 de outubro de 2024.

A Cooperativa Educacional Cesar Almeida, localizada no bairro Parque das Palmeiras, em Angra dos Reis, Rio de Janeiro, possui 16 anos de trajetória dedicados à formação integral de seus alunos, atendendo do Ensino Fundamental II ao Ensino Médio. Durante essa caminhada, a instituição tem se destacado pelo compromisso com uma educação que vai além do currículo tradicional, buscando formar cidadãos conscientes e engajados na sociedade.

Com o lema "Aqui se constrói o futuro, Somos e Fazemos!", a essência da cooperativa é evidenciada. A escola oferece um ambiente que incentiva os estudantes a desenvolverem atitudes de responsabilidade, cooperação, solidariedade e urbanidade. Em um cenário mundial de constantes mudanças, a instituição se dedica a oferecer instrumentos culturais que promovam transformações tanto materiais quanto espirituais.

A infraestrutura da Cooperativa Educacional Cesar Almeida inclui uma sala de professores, um laboratório de ciências, uma sala de leitura e acesso à internet, proporcionando um espaço adequado para o aprendizado e o crescimento pessoal. A gestão colaborativa, formada por 30 sócios responsáveis pela administração e operação da escola, garante foco na inovação e na qualidade do ensino.

Mais do que uma simples instituição educacional, a cooperativa se posiciona como um centro de desenvolvimento humano, sempre alinhada às demandas da sociedade contemporânea. Cada atividade e projeto realizados têm como objetivo preparar os alunos para compreenderem seu papel no contexto social e agirem de forma transformadora.

Os estudantes do 2º ano do ensino médio vivem uma fase marcada por descobertas, desafios e decisões importantes. Com idades entre 16 e 17 anos, esses jovens estão em um momento crucial de sua formação, tanto acadêmica quanto pessoal.

A escola oferece boa estrutura, com acesso a laboratórios, recursos tecnológicos e atividades extracurriculares. Muitos desses alunos já começam a se preparar para o Enem e vestibulares, enquanto outros ainda exploram interesses diversos, tentando entender melhor suas aptidões e possibilidades de futuro.

Vivendo em uma cidade com forte presença do turismo, da indústria naval, esses adolescentes convivem com uma diversidade de realidades. Embora façam parte de uma escola de classe média, muitos mantêm contato com diferentes contextos sociais, o que contribui para uma formação mais ampla e crítica.

No cotidiano escolar, participam de projetos interdisciplinares, feiras de ciências, debates sobre temas da atualidade e atividades voltadas para a cidadania e o meio ambiente — uma pauta especialmente relevante em Angra, dada sua localização entre o mar e a mata atlântica.

4.2 METODOLOGIA APLICADA

A pesquisa foi desenvolvida inicialmente sobre origami, onde serão trabalhados os conceitos de triângulos semelhantes. Para o desenvolvimento deste trabalho, foi escolhida a dobradura do copo que pode ser utilizada em diversos conceitos de ângulos, semelhança e área de triângulos propostos no trabalho. Esta pesquisa bibliográfica e de campo foi fundamentada nos pensadores teóricos Van Hiele e David Ausubel.

Os procedimentos foram embasados em pesquisa bibliográfica sobre temas relacionados a aplicação de métodos de ensino de geometria utilizando dobraduras de origami com embasamento nos teóricos, Piaget, Vygotsky e van Hiele. Já a aplicação será realizada em duas etapas de questionário, uma pré e uma pós, a apresentação do método da dobradura.

De cunho qualitativo, a pesquisa buscou verificar a melhoria no aprendizado, que foi analisada pela coleta de dados realizada nos questionários, comparando através de gráficos, o desenvolvimento pré e pós apresentação. Ao final foi realizado uma roda de conversa em que os alunos puderam expor suas opiniões sobre o trabalho.

Foi explicado que o trabalho consistiria na aplicação da dobradura do copo na visualização dos conceitos de triângulos semelhantes na comparação entre suas áreas conforme explicado no TALE e TCLE.

Durante a atividade, foi explicado que os alunos realizariam uma dobradura de papel para construir um copo. Essa proposta foi pensada como uma estratégia didática que alia a manipulação concreta com a construção de conceitos abstratos, permitindo que os estudantes explorem propriedades geométricas de maneira mais intuitiva. A dobradura, nesse contexto, funciona como uma ponte entre a geometria visual e a geométrica formal, estimulando o raciocínio espacial e a percepção das relações entre formas.

Antes de iniciar a atividade, foi desenhada no quadro a forma final do copo, já dividida em quatro triângulos. Foi explicado que o trabalho consistiria em demonstrar que dois pares de triângulos da figura eram congruentes, mostrando, assim, que a soma das áreas de dois triângulos era igual à soma das áreas dos outros dois. Essa etapa foi essencial para direcionar a atenção dos alunos para os objetivos matemáticos da atividade e antecipar o raciocínio que deveriam desenvolver durante a construção da dobradura.

5. RECURSO EDUCACIONAL

Este trabalho propõe uma abordagem prática e dinâmica da geometria, unindo conceitos teóricos a uma atividade concreta: a construção de um copo de origami. Destinada a alunos do 2º ano do Ensino Médio, a proposta visa explorar os fundamentos da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales por meio de dobraduras, estimulando o raciocínio lógico-espacial e a percepção geométrica. Ao conectar a matemática à arte do origami, os estudantes são convidados a compreender como figuras com formas distintas podem possuir áreas iguais, tornando o aprendizado mais significativo e motivador.

A proposta se apoia em importantes fundamentos pedagógicos. Segundo Piaget, o desenvolvimento do conhecimento ocorre a partir da interação ativa do aluno com o ambiente, favorecendo a construção do saber por meio de experiências concretas. Vygotsky destaca o papel do contexto social e da mediação do professor, enfatizando a importância da interação social e do apoio para que o aluno alcance níveis mais elevados de compreensão dentro da sua zona de desenvolvimento proximal. Já Van Hiele contribui com sua teoria dos níveis de compreensão geométrica, que orienta a progressão do aluno desde o reconhecimento visual de formas até o entendimento formal e dedutivo das propriedades geométricas, aspecto essencial para trabalhar conceitos como semelhança e Teorema de Tales.

Por meio de momentos de diagnóstico, revisão conceitual e experimentação prática, esta aula integra teoria e prática, promovendo a participação ativa e colaborativa dos alunos. Ao valorizar a manipulação de materiais concretos, a atividade reforça a importância de metodologias ativas e contextualizadas para o ensino da matemática, estimulando o interesse e a curiosidade dos estudantes.

ROTEIRO DE AULA: A GEOMETRIA E O ORIGAMI - CONSTRUÇÃO DO COPO

Público-alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio
Duração: 1 aula de 100 minutos (dois tempos de 50 minutos)

Objetivos da Aula

✅ Explorar os conceitos de semelhança de triângulos e Teorema de Tales.
✅ Trabalhar construções geométricas práticas por meio do origami.
✅ Desenvolver o raciocínio lógico-espacial e a percepção geométrica.

✅ Demonstrar como figuras com formatos diferentes podem ter áreas iguais.
✅ Incentivar a aprendizagem significativa e a participação ativa.

Conteúdos abordados

- Semelhança de Triângulos
- Teorema de Tales
- Soma dos ângulos internos de triângulos
- Construção do copo de origami (geometria aplicada)

Materiais necessários

- Papel quadrado (origami ou sulfite cortado em quadrado)
- Régua
- Lápis e borracha
- Quadro e marcador
- Projetor ou slides para apoio visual (opcional)

Desenvolvimento da Aula

1º Tempo (50 minutos)

1. Introdução e contextualização (10 min)

- Breve apresentação sobre a geometria e a história do origami, relacionando com a importância de métodos ativos de aprendizagem (Piaget, Vygotsky, Van Hiele).
- Explicação dos objetivos e do foco da aula.

2. Primeiro teste diagnóstico (15 min)

- Aplicação de um questionário diagnóstico para identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre os conceitos de semelhança e congruência de triângulos, bem como o Teorema de Tales.
- Orientar os alunos para responderem individualmente, sem troca de informações, reforçando a ideia de diagnóstico e não de avaliação de desempenho.

3. Revisão conceitual (25 min)

- Revisão da soma dos ângulos internos de um triângulo (180°).
- Apresentação do Teorema de Tales e dos critérios de semelhança de triângulos (AA, LAL, LLL).
- Explicação de como esses conceitos se conectam à dobradura que será feita na próxima etapa.

2º Tempo (50 minutos)

1. Atividade prática: dobradura do copo e análise geométrica (40 min)

- Entregar o papel quadrado e guiar passo a passo as dobras necessárias: diagonal, marcações, alinhamentos e finalização do "copo".
- Orientar os alunos na identificação dos triângulos formados pela dobradura, destacando ângulos, lados e propriedades de congruência e semelhança.
- Relacionar essas construções práticas com os critérios de semelhança e o Teorema de Tales.
- Destacar como diferentes figuras podem ter áreas iguais, mesmo com formas visivelmente distintas.
- Estimular a discussão e a interação entre os alunos, reforçando conceitos e esclarecendo dúvidas pontuais.

CONSTRUÇÃO DO COPO

Considere um quadrado de papel com vértices A, B, C e D, conforme os passos abaixo.

I. Dobre o papel quadrado sobre a diagonal AC:

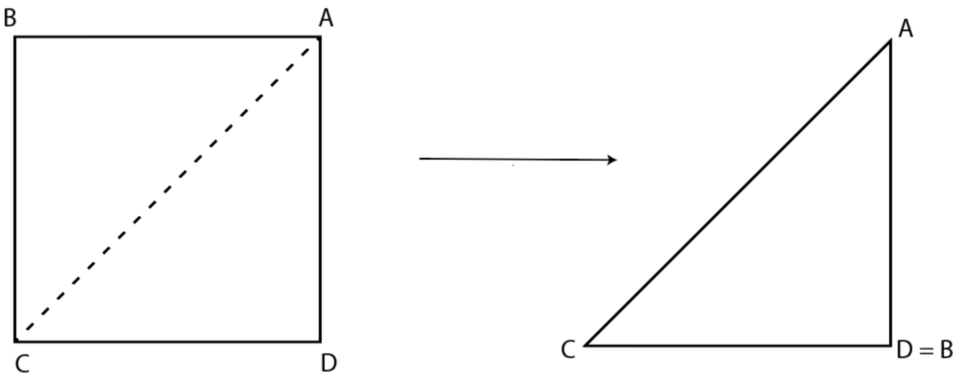


Fig. 3 e 4

II. Abra o papel e leve o lado CD, até a marca de dobra feita anteriormente, sobre a diagonal AC.

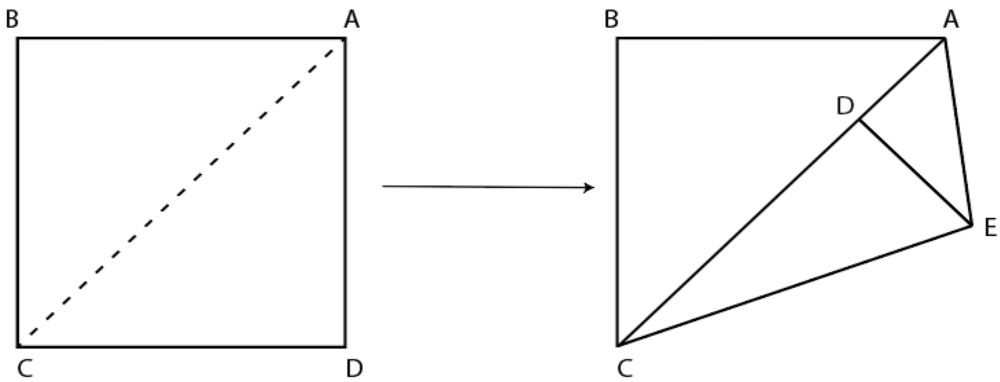


Fig. 5 e 6

Desfaça a dobra CE, e faça a primeira AC, novamente, fazendo coincidir B com D: $B \equiv D$.

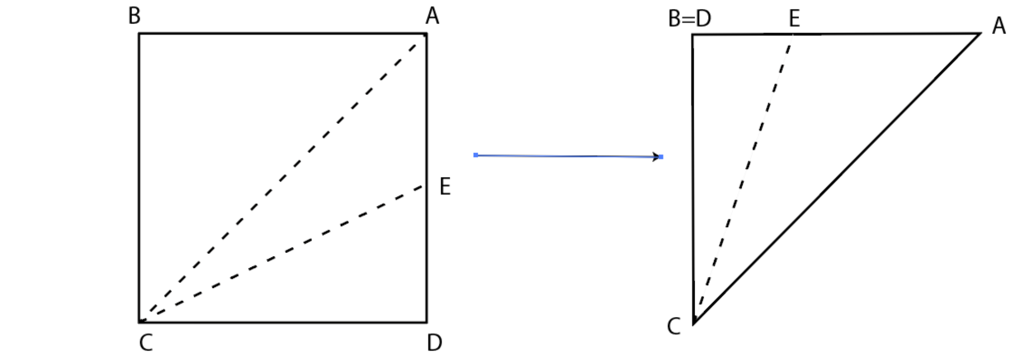


Fig. 7 e 8

III. Leve o ponto C até o ponto E.

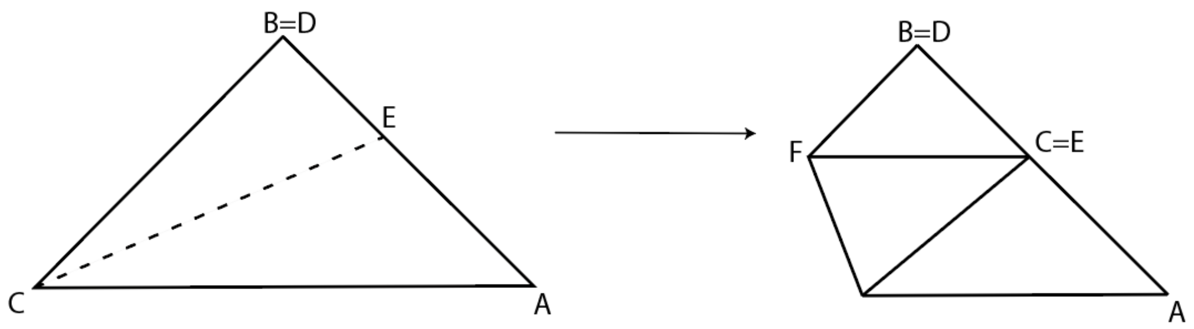


Fig. 9 e 10

IV. Vire e leve o vértice A até F.

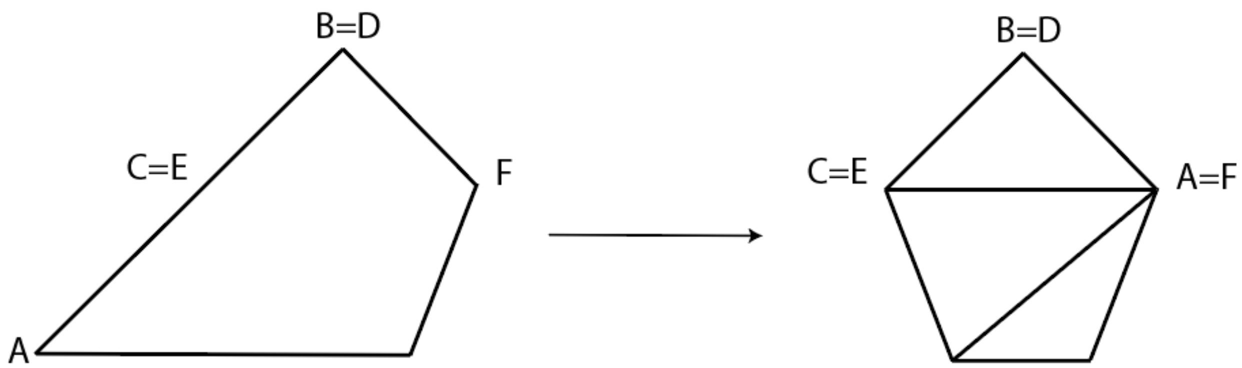


Fig. 11 e 12

V.

VI. Agora dobre a parte de cima na altura da linha *b*. Uma parte para cada lado.

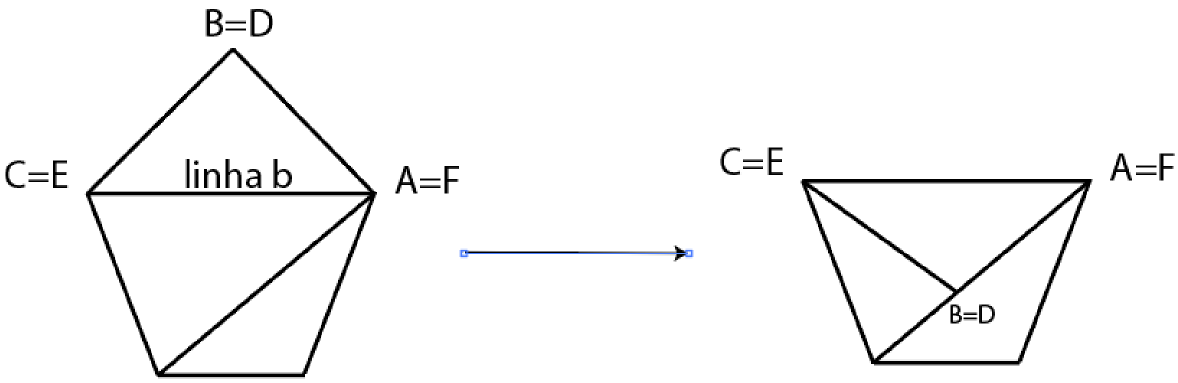


Fig. 13 e 14

Obtendo-se o copo, abaixo representado:

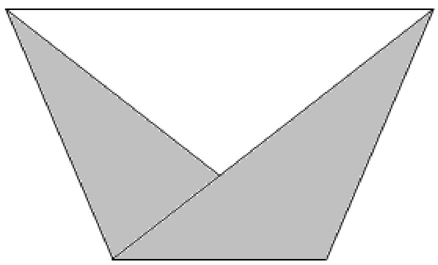


Fig. 15

É possível ver três diferentes triângulos formados pelas dobras do copo. Se fosse dito que a área do triângulo branco é a soma das áreas dos dois triângulos cinzas, muitos alunos duvidariam. Através de conceitos aprendidos, no estudo de ângulos e semelhança de triângulos, pode-se comprovar essa questão. Mas antes de começar a prova, deve-se lembrar o quanto é interessante mostrar para os alunos que formas, mesmo sendo diferentes, podem ter a mesma área.

Para provar que a área do triângulo branco e a soma das áreas dos dois triângulos cinza são iguais na Figura 16, serão feitas nomeações nos vértices do copo: C_1, C_2, C_3, C_4 e nos triângulos com o intuito de facilitar o entendimento.

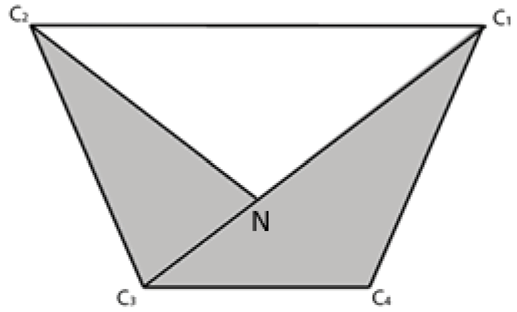


Fig. 16

Dado o triângulo C_1NC_2, traçando a bissetriz, C_1M, do ângulo â = $C_2\widehat{C_1}N$, forma-se no copo quatro triângulos C_2C_1M, C_1MN, $C_1C_3C_4$, C_2C_3N, nomeados: T_1, T_2, T_3, T_4, respectivamente. Será mostrado que os triângulos T_1 e T_2 são congruentes aos triângulos T_3 e T_4, respectivamente. Posteriormente, concluindo assim que áreas:

$$A(T_1) + A(T_2) = A(T_3) + A(T_4).$$

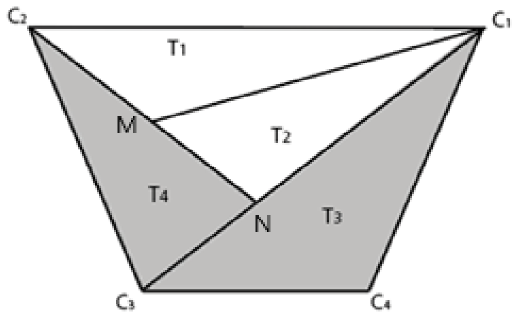


Fig. 17

DEMONSTRAÇÃO DA SEMELHANÇA DOS TRIÂNGULOS

Desfazendo a dobradura até o momento da Figura 10 podemos ver os seguintes ângulos:

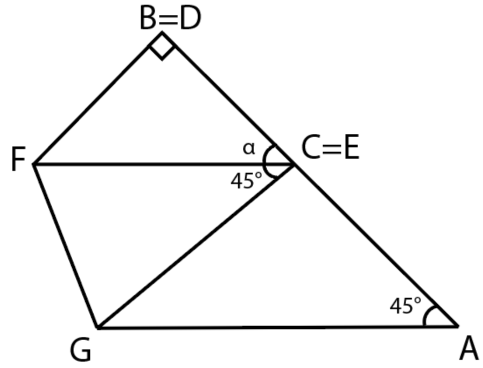


Fig. 18

Os ângulos $B\hat{A}G$ e $F\hat{C}G$ medem 45º pois são bissetrizes de ângulos retos, obtidas através das dobras dos vértices do quadrado de papel inicial. Refazendo a dobra VI (figuras 11 e 12), pela sobreposição de ângulos na dobradura, é possível verificar que o ângulo α = 45°. Já temos que $F\hat{C}B = 45$º, $C\hat{B}F = 90$º, assim $F\hat{C}B = 45$º. Dessa forma temos o triângulo FBC isósceles e os seguimentos FC e GA são paralelos.

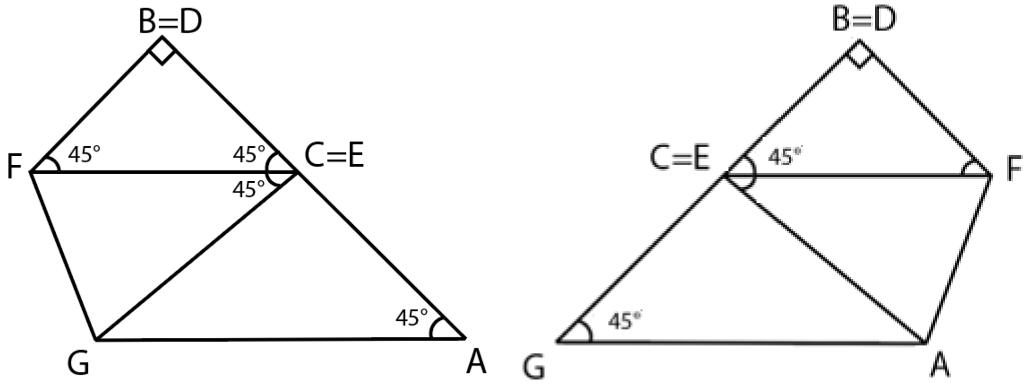


Fig. 19

Desfazendo o passo IV é possível verificar pela sobreposição da dobradura que os segmentos CF = FE.

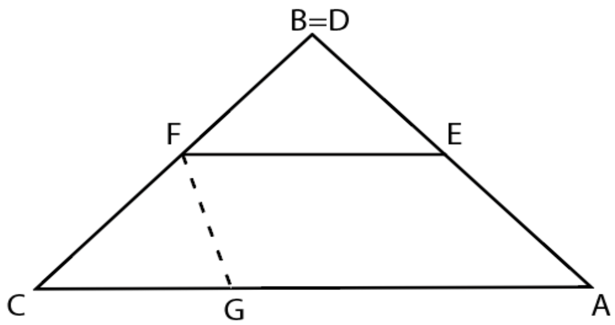


Fig. 20

O ângulo $C\hat{F}E$ é o suplementar do ângulo $B\hat{F}E$, ou seja, mede 135º. Trazendo o lado BC ao lado CA bisseccionando o ângulo $B\hat{C}A$, temos a sobreposição dos pontos F e G formando o triângulo CFE. Como verificado anteriormente CF = FE definindo o triângulo CFE como isósceles assim $F\hat{C}E = F\hat{E}C = 22{,}5^{o}$. Da sobreposição dos pontos F e G, CF = CG, assim o triângulo CFG é isósceles, lembrando que o ângulo $F\hat{C}G = 45$º. Pela soma dos ângulos internos temos que os ângulos iguais $C\hat{F}G$ e $C\hat{G}F$ medem 67,5º.

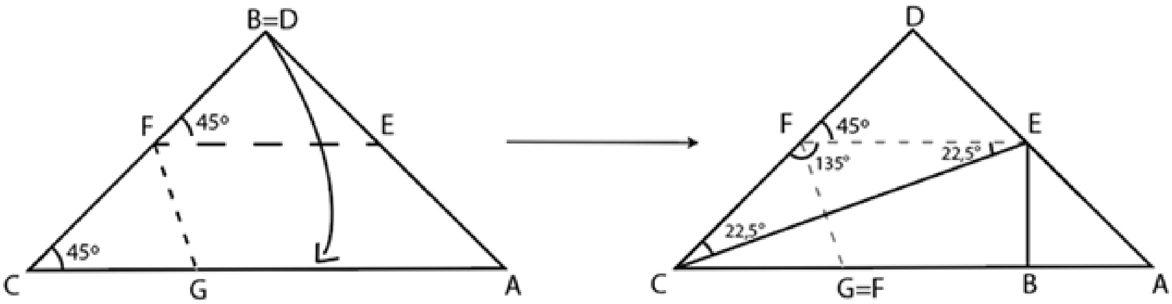
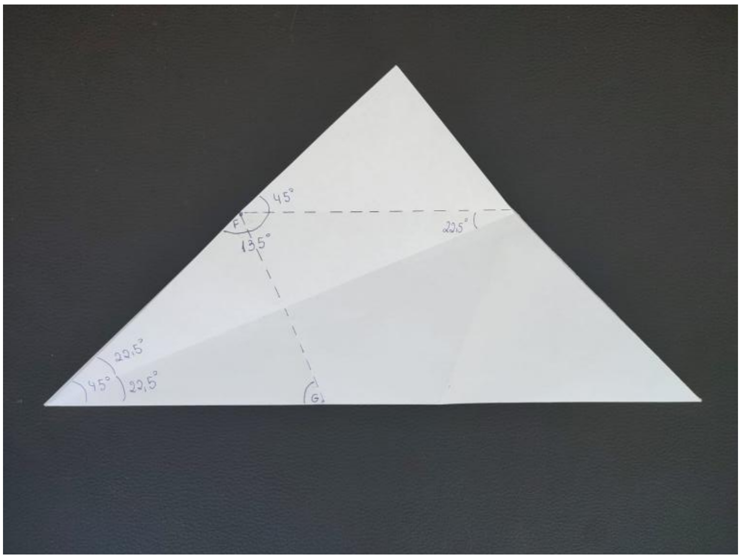


Fig. 21 e 22



Voltando com a dobra do lado BC temos os ângulos:

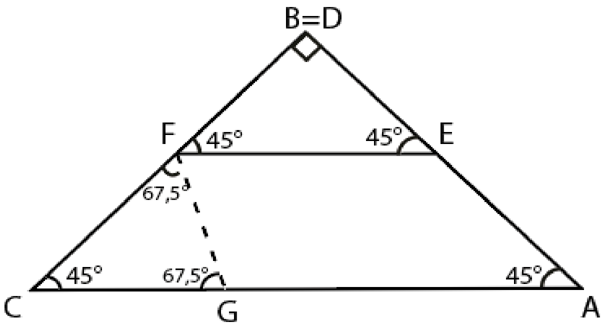
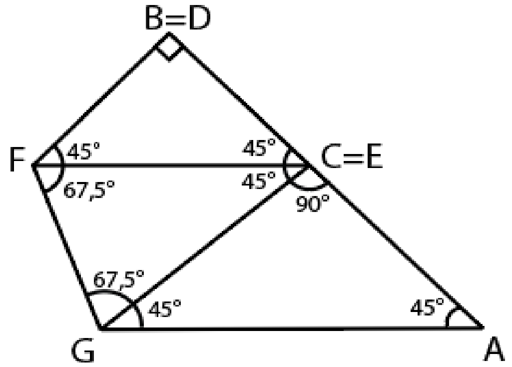


Fig. 23

Refazendo a dobra IV onde leva-se o vértice C ao ponto E, figura 24, verificamos que o ângulo $G\hat{C}A = 90°$ e, como $C\hat{A}G = 45°$, logo $C\hat{G}A = 45°$.



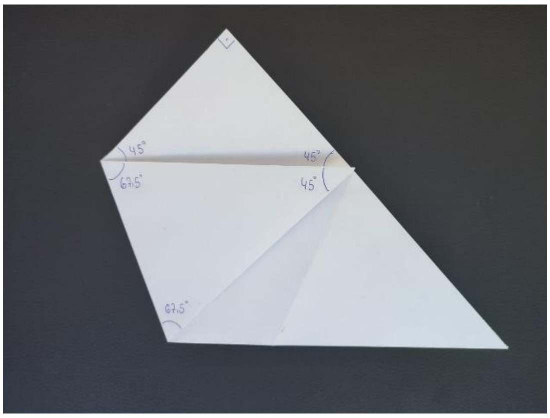


Fig. 24

Pela sobreposição do ângulo $B\hat{F}C$ no $B\hat{F}G$ pode-se notar que a diferença entre eles visto pelo ângulo $B\hat{F}G$ medirá 22,5º. Aqui temos uma dubiedade com relação ao ângulo BFG, mas isso é porque B pode ocupar duas posições. Uma antes e uma depois da dobra conforme figura 25 e 26.

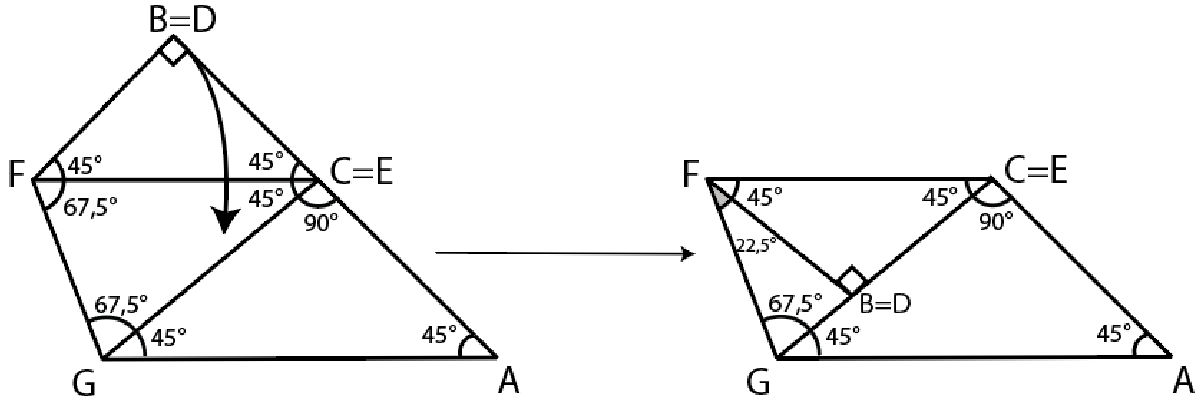
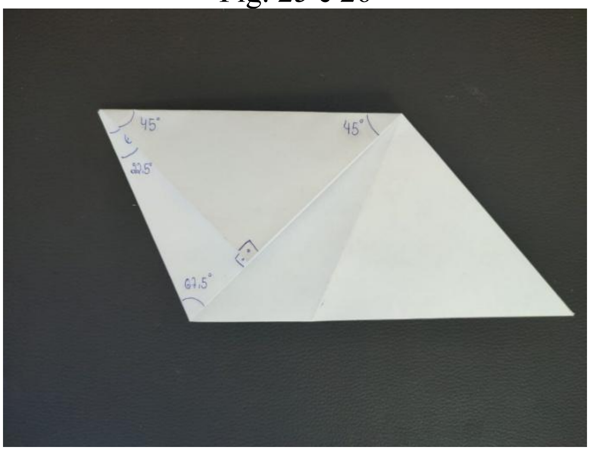


Fig. 25 e 26



Para facilitar a visualização das próximas dobras vamos voltar ao passo da figura 23. Temos os triângulos CFG e AEH em que o segmento EH é formado pela dobra do passo IV. Esses dois triângulos são congruentes pois as dobras são feitas de forma simétrica nos dois lados.

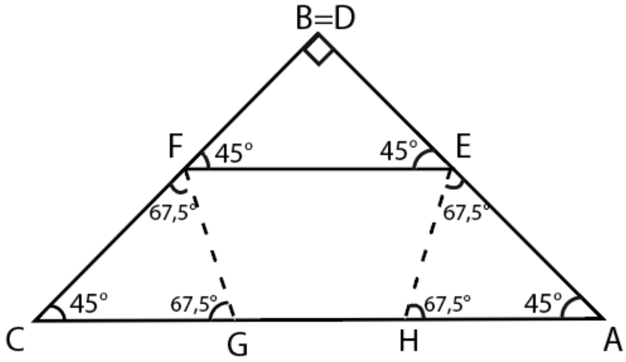


Fig. 27

Voltando a figura 26 e com as informações anteriores temos o ponto H colinear ao ponto A, portanto na figura 29 temos $C\hat{G}H = 45º$. O ângulo reto $G\hat{C}A$ foi dividido em duas partes de medidas 67,5º e 22,5º. Utilizamos o mesmo argumento para o ângulo $G\hat{H}C$ onde este é o suplemento do ângulo $C\hat{H}A$. Estamos quase finalizando nossa demonstração.

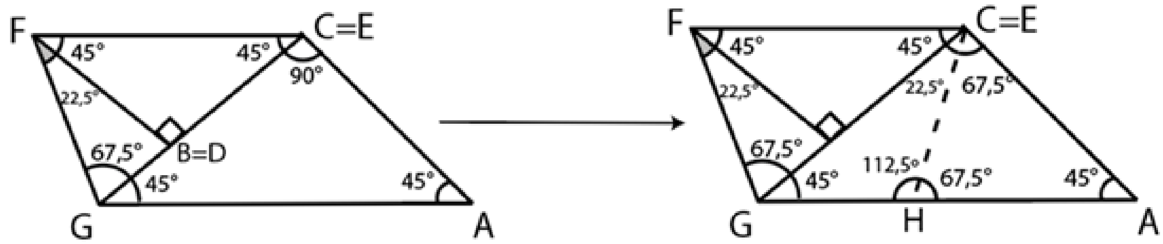
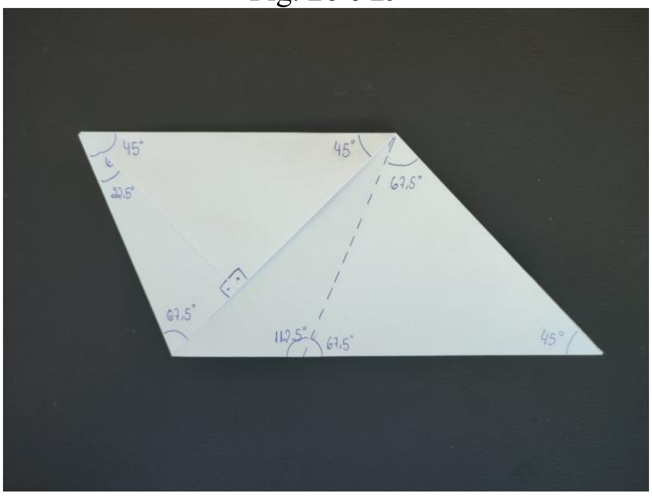


Fig. 28 e 29



Voltando a dobradura final do copo temos então os seguintes triângulos e seus respectivos ângulos:

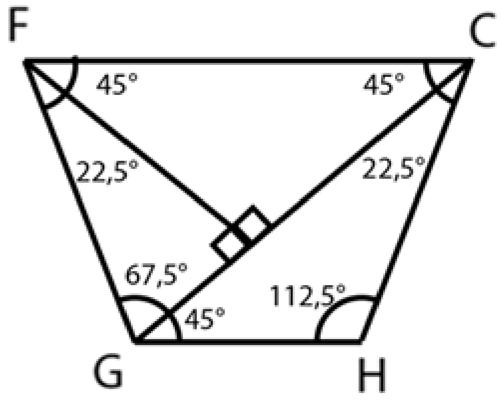


Fig. 30

Para terminar a demonstração faz-se a bissecção do ângulo $D\hat{C}F$, fazendo o segmento DC cair sobre o segmento FC. Dessa forma, seja M o ponto do segmento FD encontrado com essa dobra temos os triângulos DCM e CFM. Em DCM temos que $M\widehat{D}C$ mede 90° e $D\hat{C}M$ mede 22,5, portanto, pela soma dos ângulos internos, $C\widehat{M}D$ mede 67,5º pois como $C\widehat{M}F$ é o suplemento de $C\widehat{M}D$, que mede 112,5°.

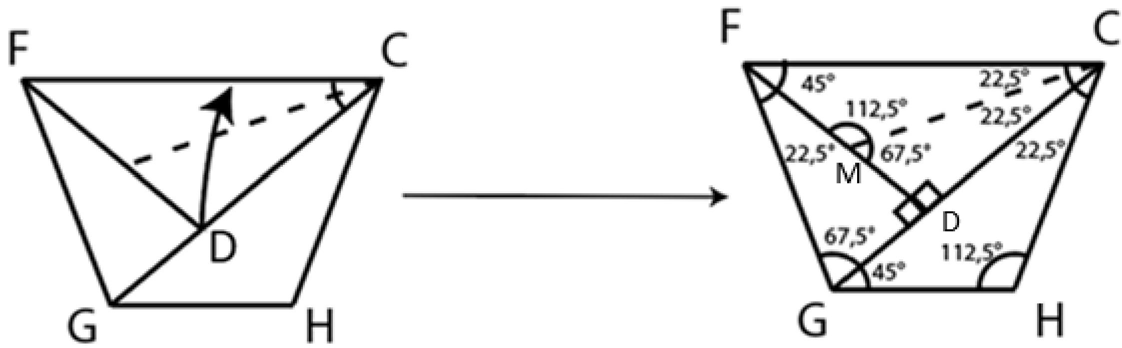
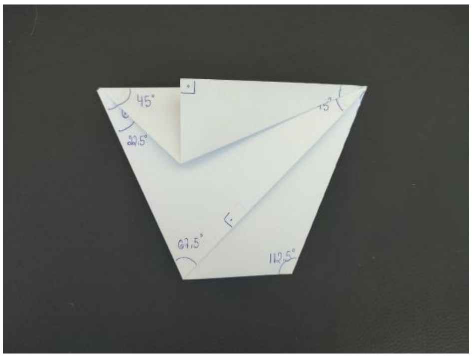
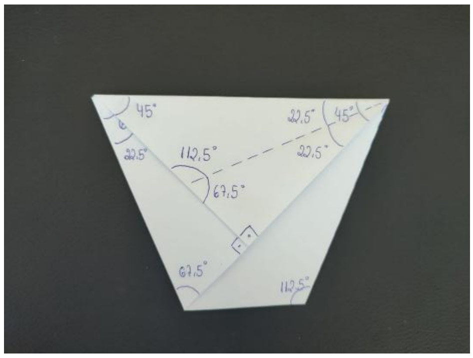


Fig. 31 e 32





Pela figura 31 e 32 temos que os triângulos FCM, que chamamos de T_1 e o triângulo CGH, que chamamos de T_3, são semelhantes pelo caso AAA, assim como os triângulos CMD, que chamamos de T_2 e o triângulo FDG, que chamamos de T_4. Finalizando a demonstração de que o triângulo T_1 é semelhante a T_3 e o triângulo T_2 é semelhante a T_4.

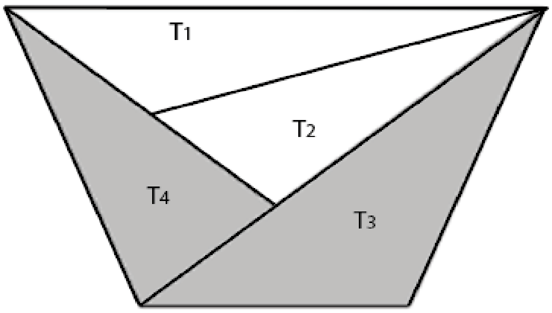


Fig. 33

Provar-se-á agora a congruência entre eles.

DEMONSTRAÇÃO DA CONGRUÊNCIA ENTRE OS TRIÂNGULOS

Para verificar as congruências usaremos o caso ALA. Para tal, encontraremos um lado em comum entre os dois triângulos e verificaremos que os ângulos nos vértices desses lados são congruentes. Iniciaremos pelos triângulos T_2 e T_4.

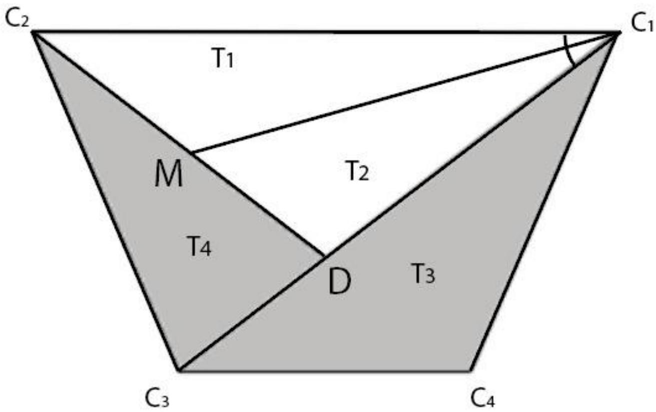


Fig. 34

Pela figura 35 temos que o triângulo FNC é isósceles com os lados FD = DC. Como CD é lado do triângulo T_2 e FD é lado do triângulo T_4. Pela figura 32 os triângulos T_2 e T_4 são semelhantes pelo critério AAA, tendo eles dois lados com as mesmas medidas, CD e FD, prova-se a congruência entre eles.

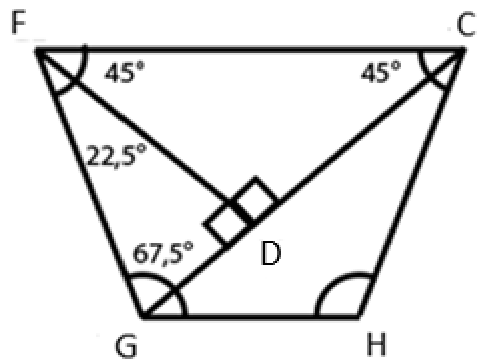


Fig. 35

Para verificar a congruência dos triângulos T_1 e T_3 podemos observar que o triângulo FCG é isósceles, logo FC = CG. Como os triângulos T_1 (FCM) e T_2 (CGH) são semelhantes pelo caso AAA, logo são congruentes.

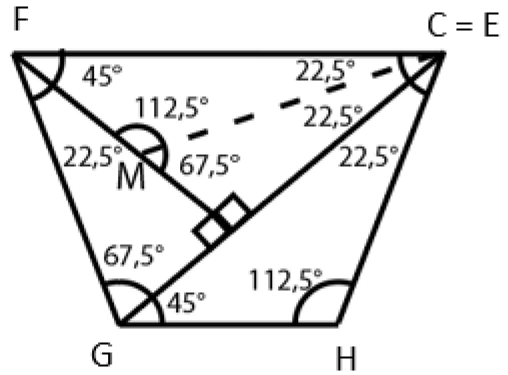


Fig. 36

Verificando assim a congruência entre os triângulos T_1 e T_3.

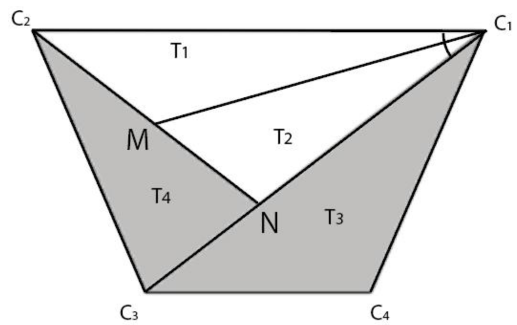


Fig. 37

2. Segundo teste diagnóstico (15 min)

- Aplicação de um novo questionário diagnóstico para avaliar o entendimento adquirido durante a atividade prática.

- Solicitar aos alunos que respondam individualmente, para medir a evolução e identificar as possíveis lacunas de aprendizagem.
- Destacar que este momento serve para verificar avanços e dificuldades.

3. Encerramento e reflexão (5 min)

- Concluir a aula destacando a importância de integrar teoria e prática para potencializar o aprendizado da geometria.
- Realizar uma roda de conversa para ouvir as opiniões e percepções dos alunos sobre a atividade realizada.
- Motivar os alunos a perceberem como a matemática está presente em diversas situações práticas do cotidiano, estimulando a curiosidade e a aplicação do raciocínio geométrico em outros contextos.

Avaliação

A avaliação será realizada por meio de questionários antes e depois da atividade, permitindo identificar avanços no entendimento dos conceitos abordados. Também será observada a participação e o envolvimento ativo dos alunos durante as atividades, assim como a capacidade de argumentação e justificativa nas construções geométricas feitas. Esse processo vai além de medir o acerto de respostas, buscando compreender o raciocínio e a evolução de cada aluno em relação aos conceitos trabalhados.

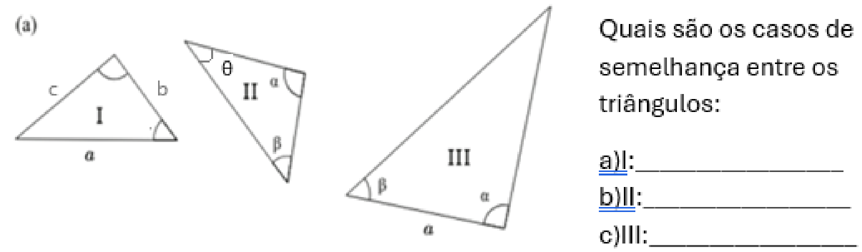
Dicas para o Professor

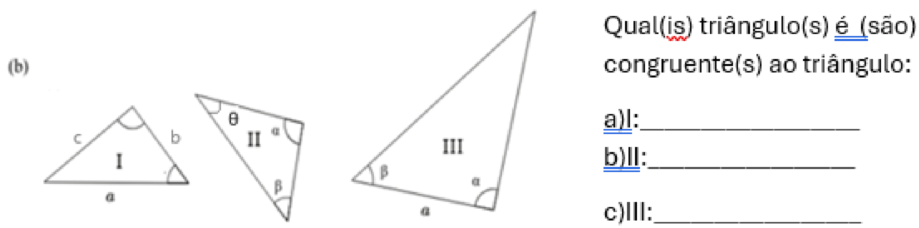
É importante que o professor estimule a troca de ideias e o trabalho em duplas ou grupos, criando um ambiente colaborativo que favoreça a aprendizagem. Durante a atividade prática, deve haver paciência para orientar os alunos que apresentam maior dificuldade na coordenação motora ao realizar as dobras. Também é fundamental reforçar constantemente as conexões entre a teoria e a prática, para que a aprendizagem seja realmente significativa. Valorizar a participação de todos, especialmente dos alunos que inicialmente podem demonstrar desinteresse, também contribui para um ambiente mais inclusivo e engajador. É também importante ressaltar que alguns ângulos mudam de valor conforme a montagem do copo é realizada como exemplo da figura 23 onde o ângulo $B\hat{F}C$ mede 180º e na figura 24 passa a medir 45º. Isso ocorre outras vezes durante a montagem e é válido ressaltar aos alunos para que não haja dúvidas. Para a execução da proposta, disponibilizaram-se apenas dois tempos de aula, o que se revelou insuficiente para o pleno desenvolvimento das atividades. Considera-se mais adequado que a aplicação ocorra em três a quatro tempos, de modo a assegurar a efetividade do trabalho e possibilitar uma participação mais ampla dos estudantes.

6. ANÁLISE DE RESULTADOS

6.1 TESTE DIAGNÓSTICO

01º Questão: Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.





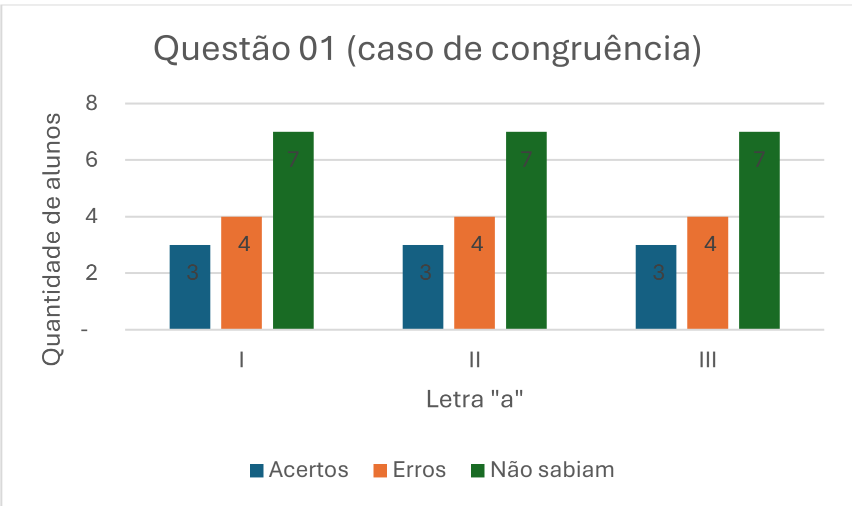


Gráfico 01

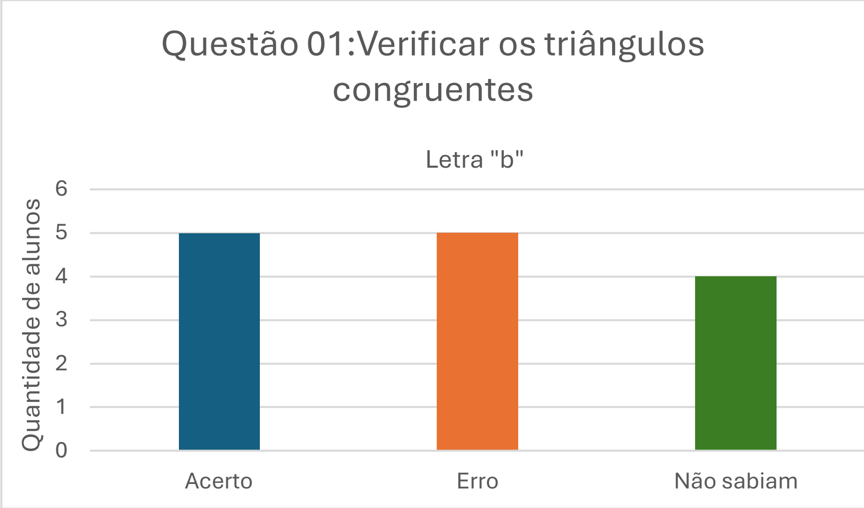


Gráfico 02

No início das atividades referente a letra *a* da questão número 01 obteve uma quantidade alta de alunos que não se recordavam dos casos de congruência de triângulos enquanto na letra *b* houve um empate entre aqueles que lembravam e acertaram (5 alunos) e os que julgavam lembrar, mas erraram o exercício. Entre os que não se lembravam, foi verificado durante a aplicação, que eles não sabiam o significado da palavra "congruente" e por isso deixaram em branco.

02ºQuestão: Sobre os triângulos semelhantes, coloque V ou F nas afirmativas a seguir.

( ) → Ao comparar os triângulos ABC e DEF, eles serão semelhantes se os seus lados forem proporcionais.

( ) → Os lados de dois triângulos semelhantes são necessariamente congruentes.

( ) → Se existem dois triângulos congruentes, então eles são semelhantes.

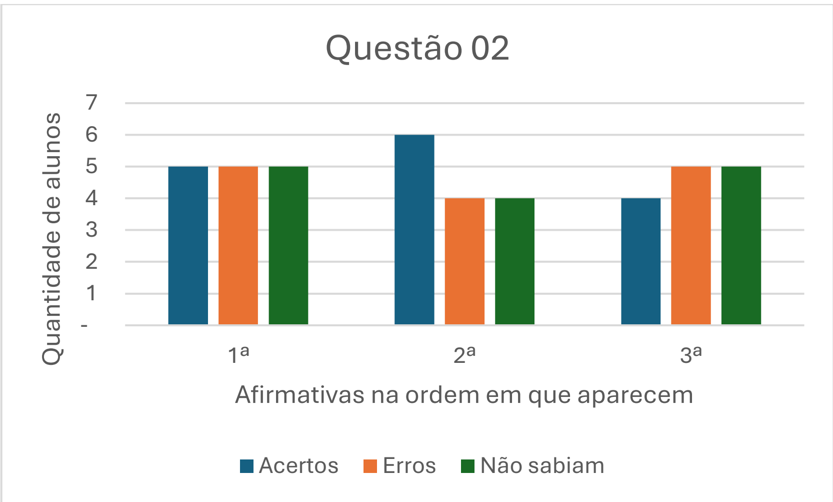


Gráfico 03

A segunda questão tenta avaliar a compreensão do conceito de semelhança de forma mais abstrata, ou seja, sem o auxílio de figuras. A primeira afirmativa 66% dos alunos erraram ou não se lembravam que triângulos semelhantes podem ser também congruentes, provavelmente pelo motivo de que alguns não conheciam o significado do nome como visto na questão 01.

3º Questão: Sobre a congruência de triângulos, coloque V ou F nas afirmativas a seguir:

(   ) – Ao comparar dois triângulos, se a medida dos ângulos for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Ângulo, Ângulo e Ângulo.

(   ) – Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

(   ) – Ao comparar dois triângulos, as medidas dos lados forem congruentes um a um, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.

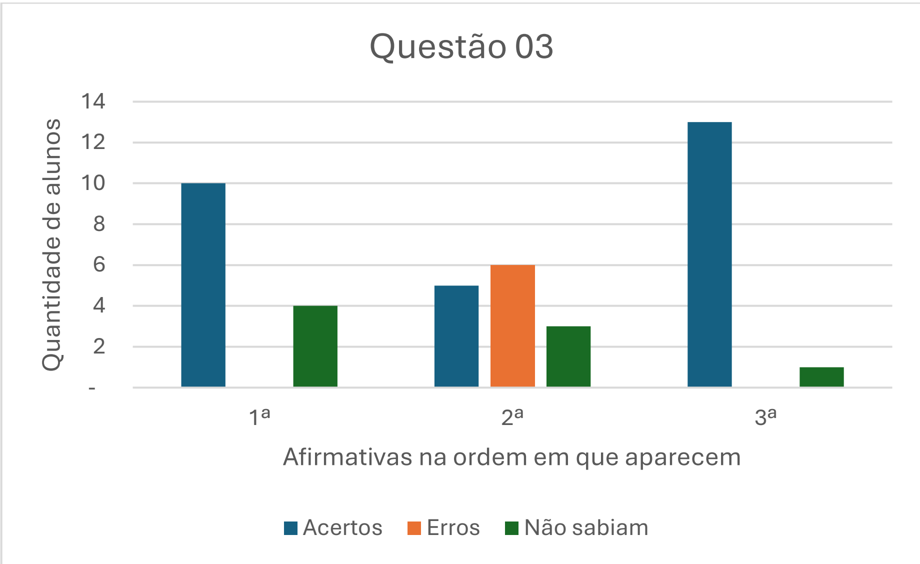


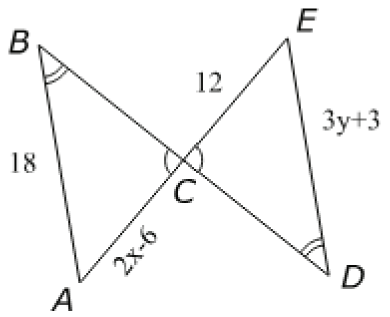
Gráfico 04

A segunda questão tenta avaliar a compreensão do conceito de congruência de triângulos também sem o auxílio de figuras. Até esse momento nenhuma explicação foi dada aos alunos e nenhuma dúvida foi tirada conforme combinado previamente, então por que um aumento no índice de acertos? Numa conversa posterior os alunos que diziam não se lembrarem dos conceitos de semelhança e/ou não conheciam o significado da palavra congruente, confessaram que responderam as afirmativas pela lógica das afirmativas em si. Por exemplo, na última afirmativa foi repetida a palavra “congruência” e como a questão julgava veracidade em relação a esse conceito eles julgaram (chutaram) que seria verdadeira. Vale então ressaltar para futuras aplicações que essas afirmativas sejam refeitas.

04º Questão: Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.

x = ______

y = ______



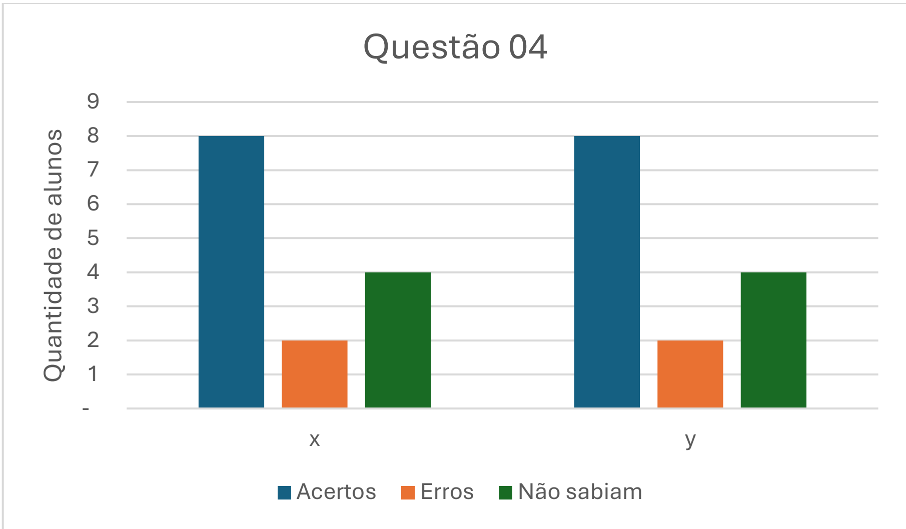
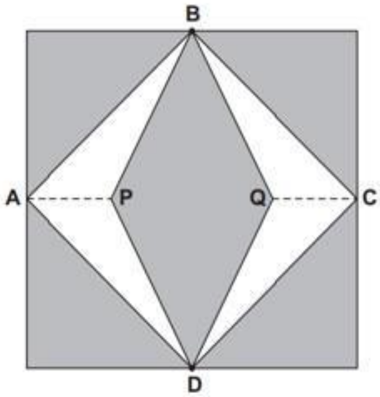


Gráfico 05

Numa questão mais prática os resultados foram melhores. Ao contrário da questão 03, agora os alunos acertaram, pois, lembravam que deveriam comparar os lados referentes aos ângulos, mas não sabiam explicar o porquê.

Questão 05: Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30 m², e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50 m². De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

A) R$ 22,50

B) R$ 35,00

C) R$ 40,00

D) R$ 42,50

E) R$ 45,00

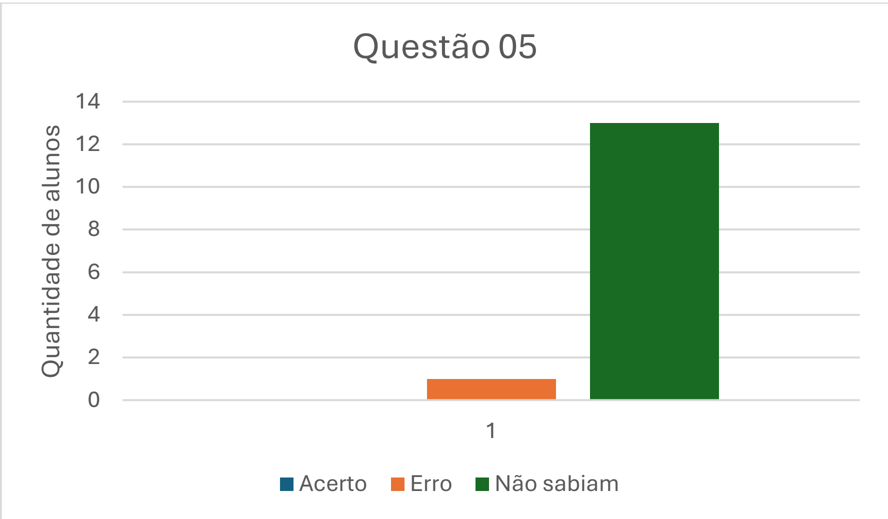


Gráfico 06

Questão retirada do ENEM de 2012. Apesar das tentativas ninguém conseguiu encontrar a resposta.

3ª parte: O Copo.

Durante o processo, observou-se que alguns alunos apresentavam maior dificuldade em realizar as dobras, enquanto outros as faziam de forma prática e rápida. Essa diferença de desempenho evidenciou a importância de se considerar os distintos níveis de habilidade motora e de familiaridade com atividades manuais entre os alunos. Para alguns, a coordenação necessária para alinhar com precisão as dobras exigia mais tempo e atenção, o que reforça a relevância de oferecer um acompanhamento individualizado e instruções claras.

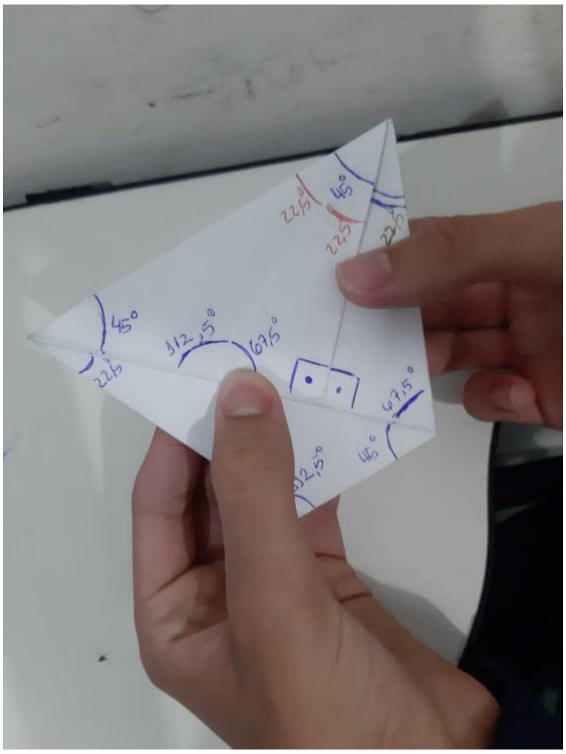
Nesse momento, surgiram questionamentos importantes, como: "Como figuras aparentemente tão diferentes poderiam ter a mesma área?". Essa dúvida oportunizou a retomada de conceitos previamente discutidos em sala, como o fato de que figuras com formatos distintos podem, sim, possuir áreas iguais — como, por exemplo, um retângulo e um triângulo que, apesar de diferentes na forma, podem ocupar uma mesma área. Essa reflexão ajudou os alunos a perceber que a congruência e a equivalência de área não estão necessariamente relacionadas à aparência visual, mas sim a medidas específicas como lados e ângulos.

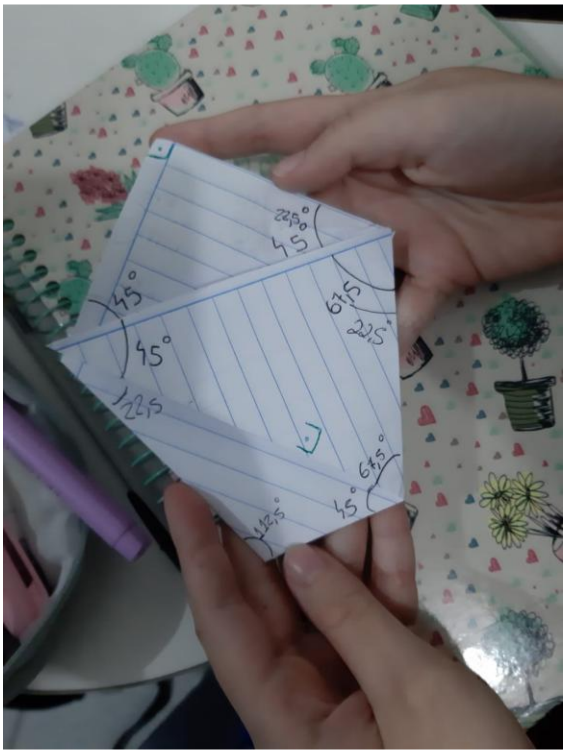
Ao longo do desenvolvimento da atividade, foram identificadas dificuldades relacionadas à visualização dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal — especialmente os ângulos alternos internos e correspondentes, fundamentais para identificar semelhanças entre os triângulos formados pela dobradura. Além disso, alguns alunos apresentaram dúvidas quanto aos critérios de semelhança e congruência de triângulos, como LAL (lado-ângulo-lado), AA (ângulo-ângulo) e LLL (lado-lado-lado). Foi necessário retomar esses critérios, explicando-os com calma, muitas vezes utilizando esquemas visuais no quadro e objetos concretos para facilitar a compreensão.

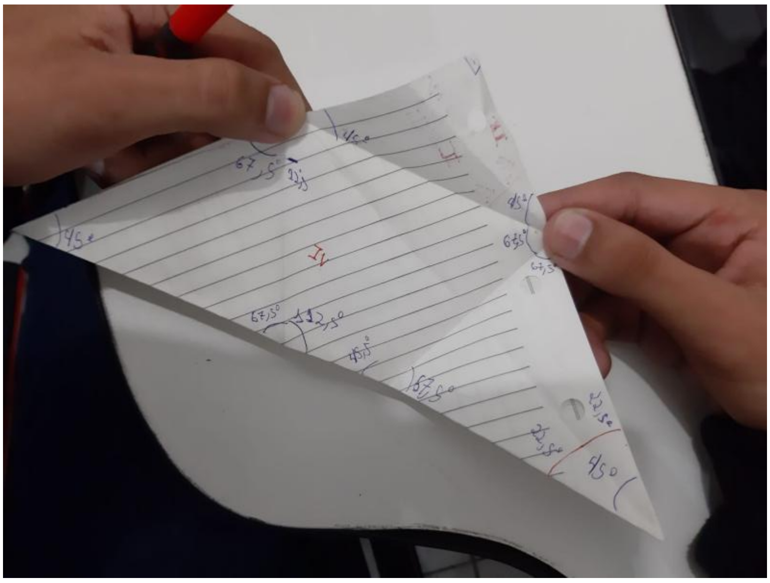
Com paciência e explicações detalhadas, a demonstração do copo foi concluída de modo a garantir que todos os alunos entendessem os conceitos envolvidos. O ritmo da atividade foi ajustado de modo a assegurar a participação de todos os estudantes, criando um ambiente colaborativo em que os estudantes mais rápidos também pudessem contribuir ajudando os colegas. Esse aspecto colaborativo reforça habilidades socioemocionais, como empatia e cooperação, além de fortalecer o aprendizado por meio da explicação entre pares.

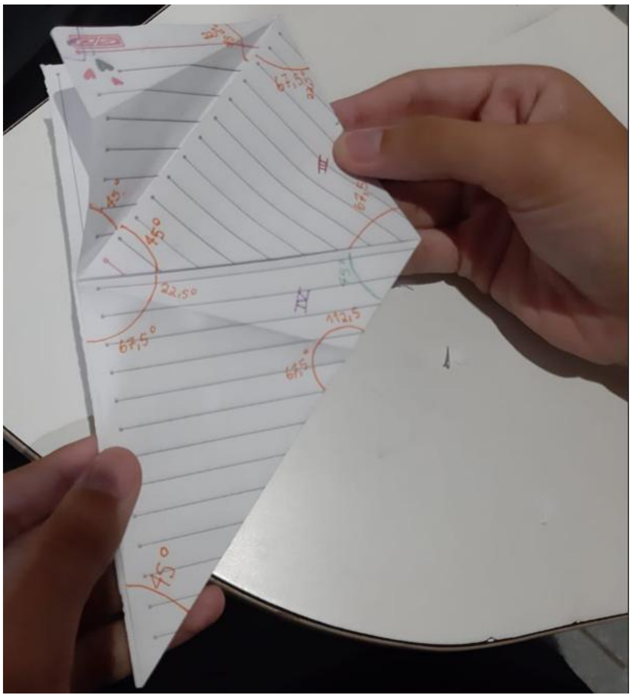
Após a conclusão da atividade, foram esclarecidas dúvidas pontuais sobre alguns processos da demonstração que ainda não estavam claros para alguns estudantes, consolidando o aprendizado. O uso da dobradura mostrou-se uma ferramenta eficaz para tornar visíveis conceitos abstratos, transformando a sala de aula em um espaço dinâmico e investigativo, no qual os alunos constroem conhecimento com as próprias mãos e desenvolvem um olhar mais atento às relações geométricas presentes no mundo ao seu redor.

Fotos da atividade:









4ª parte: Segundo Teste Diagnóstico.

No segundo teste diagnóstico algumas dúvidas ainda persistiam, porém relembrando passos da dobradura, essas foram sanadas. O teste foi idêntico ao primeiro e mostrou uma grande melhora em relação ao número de questões certas. Pode-se concluir que todos os alunos tiveram alguma evolução, uns mais outros menos, no conhecimento que tinha sido passado, o que demonstra um bom sucesso na metodologia de ensino aplicada.

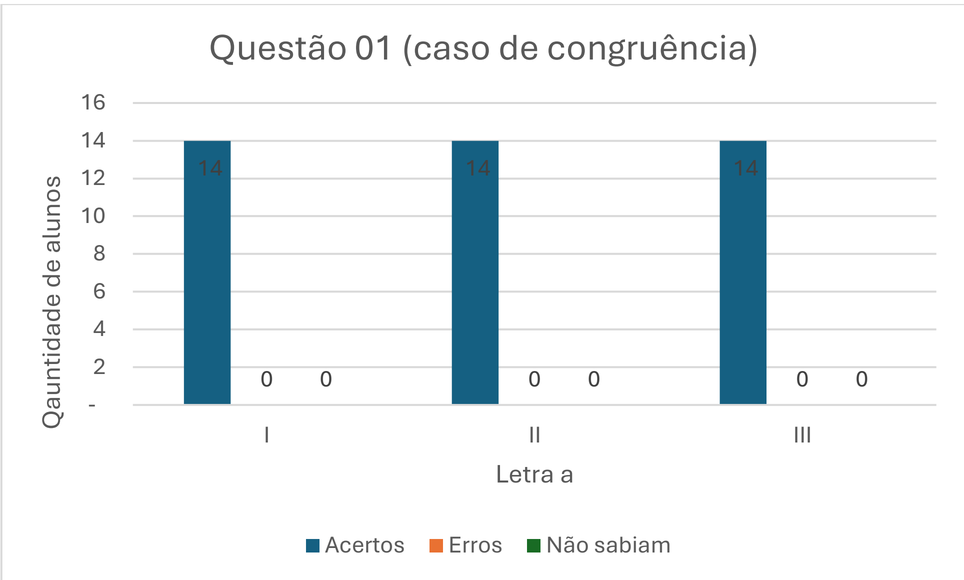


Gráfico 07

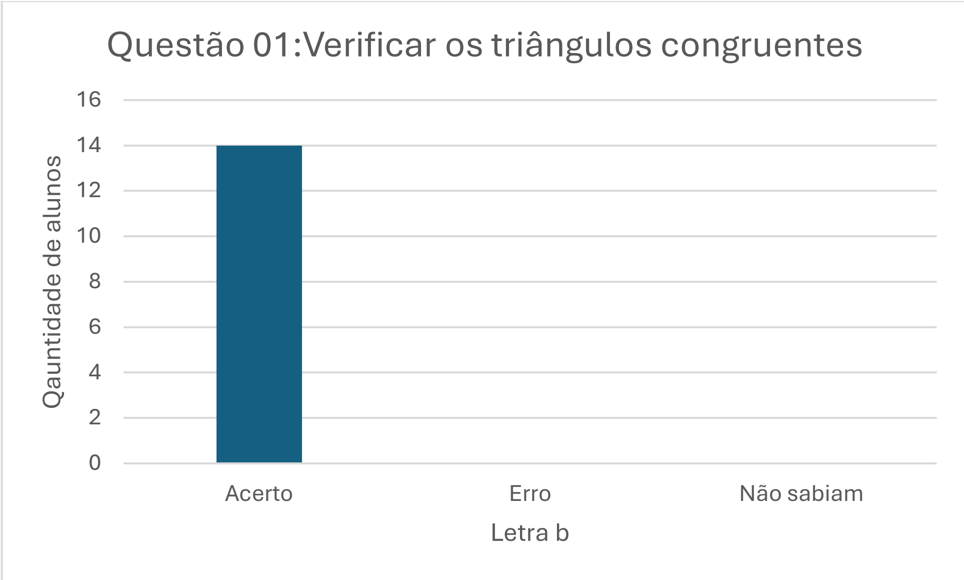


Gráfico 08

Questão 01 teve 100% de acertos na segunda aplicação do teste o que influenciou na melhora dos acertos nas questões 02 e 03. Os alunos comentaram que lembravam o porque da forma de resolução da questão 04 após a aplicação do método o que foi mais importante do que o acerto desta em si. A questão 05 continuou sendo uma pedra para alguns mas o método auxiliou na visualização dos triângulos congruentes como foi comentado com os alunos enquanto a aplicador acompanhava as resoluções.

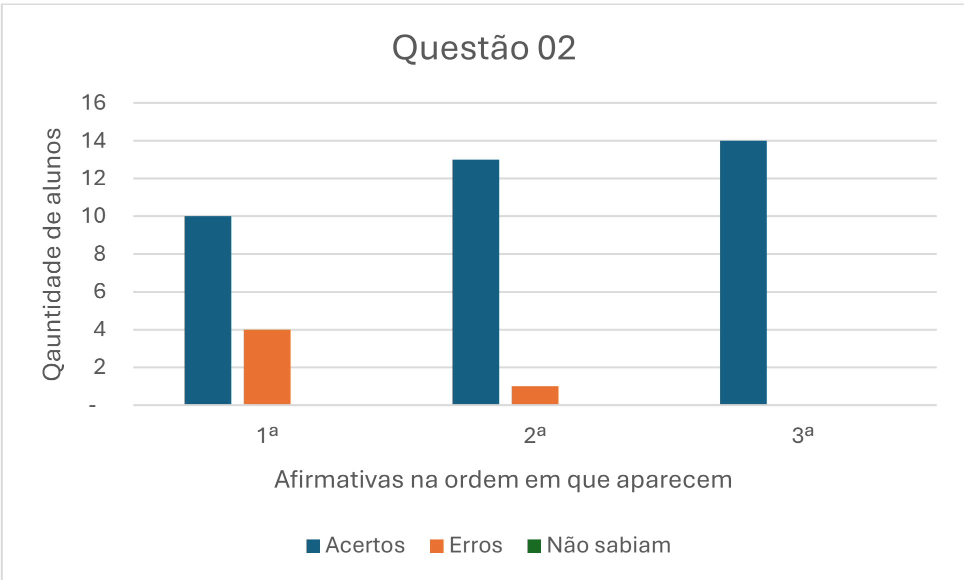


Gráfico 09

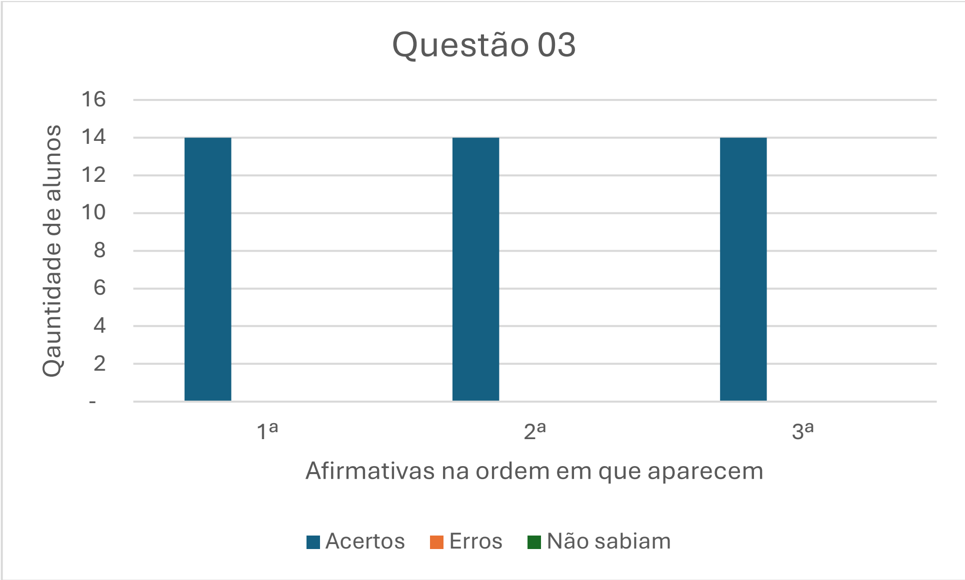


Gráfico 10

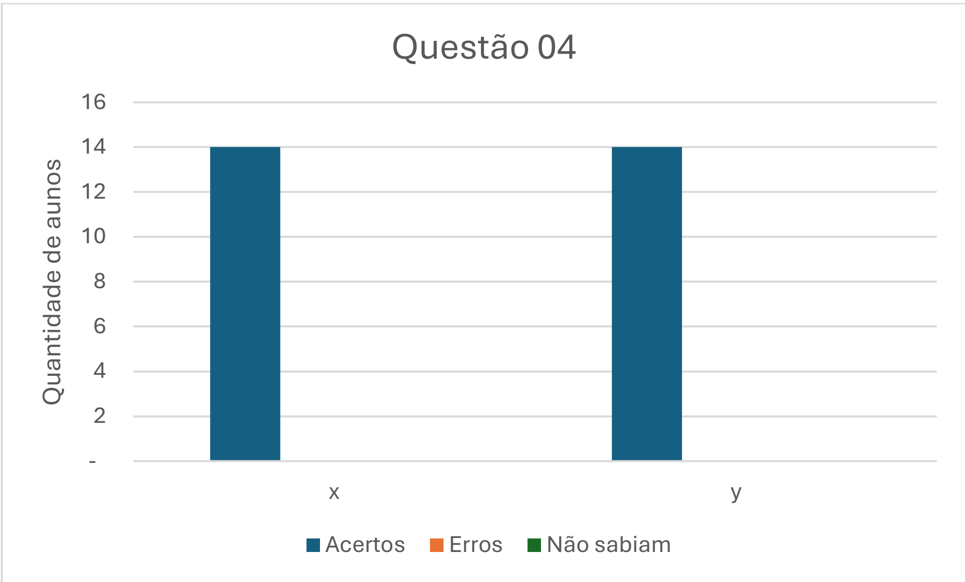


Gráfico 11

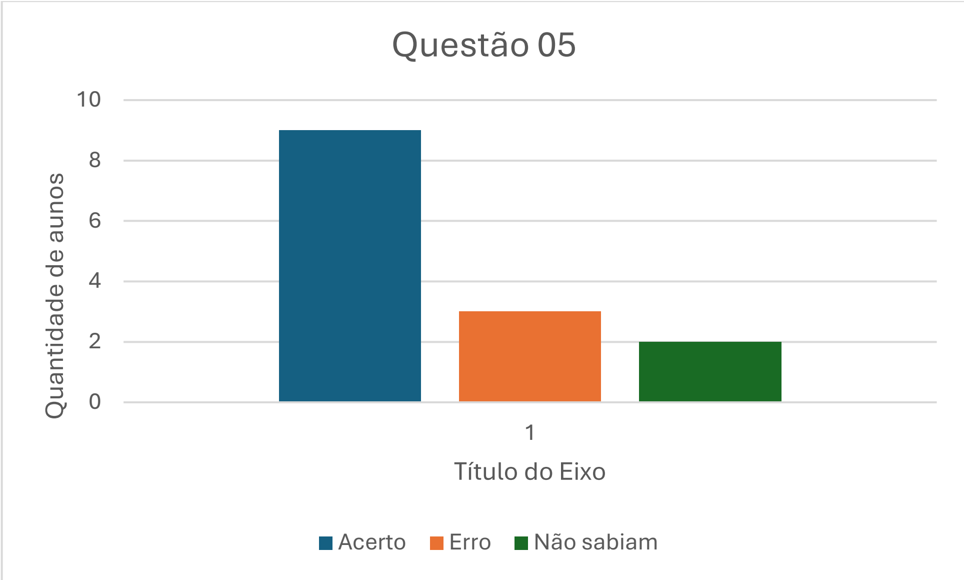


Gráfico 12

Ao término do segundo teste diagnóstico podia-se ouvir alguns comentários em relação às áreas dos triângulos serem iguais e ainda sim parecerem tão diferentes. Inclusive um aluno entrou com o copo cheio de água para ver se realmente não vazava. O trabalho chamou a atenção mesmo de alunos desinteressados que, mesmo brincando, falavam certo os casos de semelhança enquanto refaziam a avaliação, enquanto os mais interessados discutiam a questão 5 após sua resolução.

5ª parte: Opinião dos alunos.

Com o término do trabalho, foi feito uma roda de conversas para que os alunos colocassem suas opiniões sobre o trabalho. Essas foram algumas respostas:

"A atividade da dobradura do copo foi uma maneira muito prática e divertida de aprender sobre congruência de triângulos. Pude visualizar melhor como os pares de triângulos eram iguais e como suas áreas se relacionavam. Isso tornou o conceito muito mais fácil de entender."

"Gostei muito de como o trabalho foi feito passo a passo. A dobradura e o desenho no quadro ajudaram a enxergar como os triângulos se formam e como podem ser comparados. Foi bem mais interessante do que simplesmente fazer exercícios no papel."

"Eu nunca tinha pensado em usar algo tão simples como uma dobradura para aprender geometria. Pintar os triângulos na figura do copo me ajudou a visualizar melhor os pares que eram congruentes. Foi uma atividade criativa e diferente."

"A explicação detalhada e o uso do copo tornaram o aprendizado mais claro. Mesmo com dificuldades nos ângulos, como dividir 45º, o professor explicou de forma que todos pudessem entender. Isso me deu mais confiança para resolver problemas de geometria."

"A atividade foi bem prática, e eu consegui perceber que figuras diferentes podem ter a mesma área. Achei muito interessante como a dobradura conectou algo do dia a dia com conceitos matemáticos importantes."

"A experiência foi ótima porque não ficou só na teoria. Fazer a dobradura, dividir os triângulos e pintar os pares congruentes foi muito mais interativo do que apenas assistir a uma aula. Senti que aprendi de verdade."

"Achei incrível como uma coisa tão simples como dobrar papel pode ensinar tanto sobre congruência de triângulos. Foi uma aula diferente, criativa e que me ajudou muito a fixar o conteúdo."

CONCLUSÃO

A utilização do origami como ferramenta no ensino da Geometria, especialmente no estudo dos triângulos, revela-se uma estratégia altamente eficaz. Essa abordagem beneficia não apenas os alunos que já enfrentam dificuldades na compreensão do conteúdo, mas também aqueles que estão sendo introduzidos à disciplina pela primeira vez. O origami proporciona uma maneira prática e visual para os estudantes assimilarem regras e propriedades geométricas, facilitando a compreensão e despertando maior curiosidade. Essa interatividade aumenta significativamente o interesse dos alunos, que passam a buscar novos meios de aprendizado, explorando outras dobraduras como exemplos.

As teorias de Van Hiele, sobre os níveis de aprendizado e propriedades para o ensino da Geometria, combinadas com a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, contribuíram para o sucesso da aplicação prática deste trabalho. O campo experimental demonstrou resultados positivos no desenvolvimento do aprendizado dos estudantes, validando a eficácia da metodologia empregada.

O uso do origami despertou espanto e admiração nos alunos. A atividade da dobradura do copo foi especialmente divertida e permitiu uma compreensão mais fácil dos conceitos de semelhança e congruência trabalhados. A metodologia baseada no uso de dobraduras para o ensino de semelhanças triangulares, relação entre áreas e ângulos provou ser valiosa, pois transforma conceitos abstratos em experiências lúdicas e concretas. Esse método se mostrou mais eficaz do que as aulas convencionais, onde muitos alunos têm dificuldade em entender as propriedades e acabam recorrendo à simples memorização.

É essencial incorporar materiais concretos na construção do conhecimento, pois eles aprofundam o estudo e tornam os conceitos mais acessíveis para alunos que possam ter dificuldade em acompanhar o conteúdo. A combinação de boas metodologias de ensino com o interesse e a atenção dos alunos em sala de aula é determinante para uma aprendizagem de qualidade. Infelizmente, essa realidade ainda é escassa em muitas instituições de ensino no país.

A urgência em discutir a qualidade do ensino no Brasil é evidente, e novas metodologias devem ser priorizadas para promover melhorias significativas na educação. Somente com a aplicação de estratégias inovadoras será possível alcançar uma educação mais eficiente e inclusiva.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David Paul. ***The Psychology of Meaningful Verbal Learning***. New York: Grune & Stratton, 1963.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo. Editora Edgard Blücher, 1974.

BRANDÃO, Karla de Almeida. **Saberes docentes sobre Grandezas e Medidas**: interações entre professores do Ensino Fundamental. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CORRÊA, Rosilene Pereira de Oliveira. **Construções Geométricas:** uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2020.

DIAS, Marly Moreira. **Técnicas, procedimentos e recursos de ensino.** Alfenas: UNIFENAS, 2007.

FREIRE, Paulo. **Educação e mudança**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

GLOWECKI, Kenia Carla Belo Domingues. **Uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos.** Dissertação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2015.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do Ensino Médio**. 2007. Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

GUIANA, Denise. **Aprendizagem Significativa da Geometria Espacial facilitada por materiais reutilizáveis**. 2020. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2020.

HAMAZAKI, A.C. **O Ensino da Geometria por meio da Metodologia van Hiele: Uma Experiência.** Guarulhos: Saraiva. 2000.

KANEGAE, S. **O Origami.** Japão. 1987.

KRAISHWESKI, T. **Bibliografias: Matemáticos.** Santa Catarina: Editora Irmãos. 1928. pp.01-30.

LEIVAS, José Carlos Pinto. NADALON, Dionatan de Oliveira. SOARES, Gabriel de Oliveira. LUTZ, Mauricio Ramos. **Recurso didático para ensinar geometria: o uso de dobras de papel para obter regiões poligonais/polígonos.** Artigo. Revista da Rede Amazônia de Educação em Ciências e Matemática. Cuiabá. pp.265-281

LIBÂNEO, José Carlos. Desenvolvimento histórico da Didática. In: **Didática.** São Paulo: Cortez, 1992. pp.57-64.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista. Geometria. Blumenau: Moraes. nº. 04, 1995, pp.03-13.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

PASSARONI, Luiz Claudio de Sousa. **Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI)** – Aplicações ao ensino básico. Dissertação. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2015.

PEREIRA, G.A.; SILVA, S.P.; MOTTA Jr., W.S. **O Modelo de van Hiele de Ensino de Geometria aplicado à 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental.** Uberlândia: Nova Editora. 2005.

RIBEIRO, Rafaela dos Santos. RIBEIRO, Roberta dos Santos. CARDOSO, Valdinei Cezar. **Origami como material manipulativo: investigando possibilidades para ensinar geometria para um aluno de terceiro ano do Ensino Fundamental.** Artigo. Revista Kiri-kerê: Pesquisa em Ensino, n.11. São Mateus, Espiro Santo. dez. 2021

REGO, R.G.; REGO, R.M.; JUNIOR, S.G., **A Geometria do Origami**. João Pessoa: Editora Austin. 2003.

RIBEIRO, Celso Henrique Motta. **O uso de dobraduras como ferramentas de aprendizagem sobre quadriláteros notáveis na educação básica**. Dissertação. Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2021.

SANTOS, José Everaldo Gomes. **A utilização da técnica de origami (dobraduras) como estratégia facilitadora para a aprendizagem de geometria no ensino fundamental.** Dissertação. Universidade da integração internacional da lusofonia afro-brasileira. Redenção, Ceará, 2020.

SILVA, Henrique José de Ornelas. **Construções geométricas com régua e compasso e dobraduras.** Dissertação. Universidade Federal de Viçosa. Florestal, Minas Gerais, 2018.

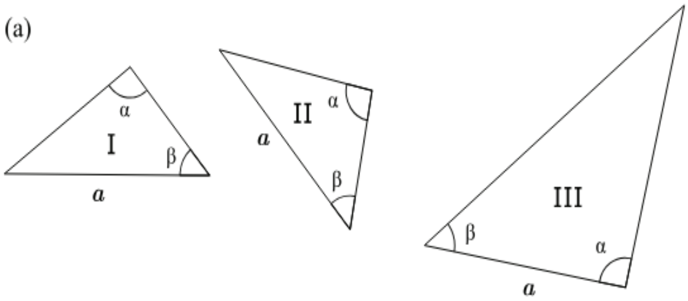
SILVEIRA, Priscila Ferreira. **Explorando propriedades geométricas a partir de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica.** Dissertação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2020.

VICTÓRIO, Jonathas Raposo Soares. **Abordagens do origami e dobraduras no ensino de geometria.** Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2018.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO PRÉ E PÓS APLICAÇÃO DO TRABALHO

Questão 01: Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.

(a)



a) I:__________

II:__________

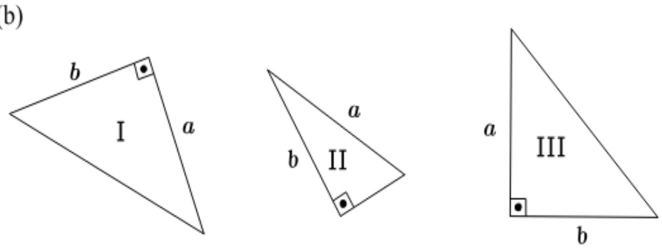
III:__________

b) I:__________

II:__________

III:__________

(b)



Questão 02: Sobre os triângulos semelhantes, coloque V ou F nas afirmativas a seguir.

( ) → Ao comparar os triângulos ABC e DEF, eles serão semelhantes se os seus lados forem proporcionais.

( ) → Os lados de dois triângulos semelhantes são necessariamente congruentes.

( ) → Se existem dois triângulos congruentes, então eles são semelhantes.

Questão 03: Sobre a congruência de triângulos, coloque V ou F nas afirmativas a seguir:

( ) – Ao comparar dois triângulos, se a medida dos ângulos for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Ângulo, Ângulo e Ângulo.

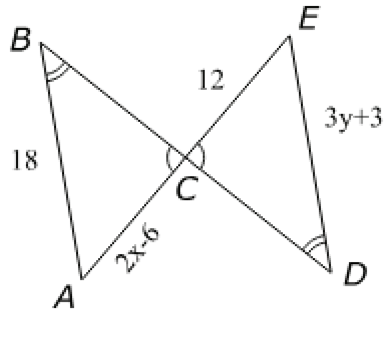
( ) – Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

( ) – Ao comparar dois triângulos, as medidas dos lados forem congruentes um a um, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.

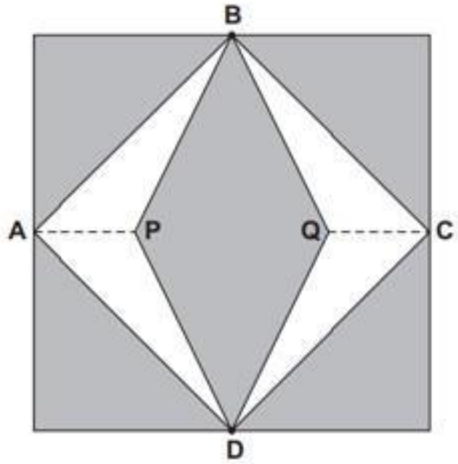
Questão 04: Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.

x = _____

y = _____



Questão 05: Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30 o m², e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50 o m².

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

A) R$ 22,50

B) R$ 35,00

C) R$ 40,00

D) R$ 42,50

E) R$ 45,00

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convite Especial para Você!

Você está sendo convidado(a) para participar de um estudo que tem o seguinte nome: Trabalhando semelhança de triângulos com a dobradura do copo.

Com este documento você fica sabendo de tudo que vai acontecer nesse estudo, e se tiver qualquer dúvida é só perguntar para o pesquisador ou seu responsável.

Sua participação é importante e você pode escolher participar ou não.
Iremos conversar com seus responsáveis, pois é importante termos a autorização deles também.
Antes de você decidir participar do estudo, é importante saber por que esta pesquisa está sendo realizada e como será a sua participação.

Você pode em qualquer momento dizer que não quer mais fazer parte do estudo, mesmo que tenha assinado este documento. Você não será prejudicado (a) de forma alguma, mesmo que não queira participar. Você, seus responsáveis ou sua família não precisam pagar nada para sua participação no estudo.

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

Por que esta pesquisa é importante?

Este estudo está sendo feito com o objetivo de aplicar a dobradura do copo no desenvolvimento da aprendizagem do conceito de semelhança de triângulos e suas áreas no 2° ano do Ensino Médio onde iremos investigar a dificuldade na visualização de semelhança de triângulos e suas áreas, estimular os alunos na utilização do origami para compreensão de conceitos geométricos e explicar que mesmo figuras diferentes possuem áreas iguais.

A justificativa do projeto consiste em que a geometria pode se tornar um verdadeiro desafio para muitos alunos principalmente quando nos aprofundamos nos conceitos sobre ângulos e, em consequência, semelhança de triângulos e suas propriedades. Esse aprofundamento aumenta a complexidade das construções geométricas e a visualização se torna um problema para a compreensão dos exercícios.

Quem pode participar?

A pesquisa é direcionada para uma turma do segundo ano do Ensino Médio da Cooperativa Educacional César Almeida, no município de Angra dos Reis.

Como será a pesquisa?

Será apresentado um questionário para verificar seus conhecimentos na matéria de semelhança de triângulos onde você irá responder da melhor forma possível. Após a aplicação do questionário se iniciará a apresentação da dobradura junto das explicações sobre triângulos abordando seus casos de semelhança. Ao final será realizada novamente o questionário para avaliação posterior do desempenho e, ao final, um bate papo para sabermos sua opinião sobre o trabalho.

Se você participar, o que pode acontecer? Quais são os riscos?

A pesquisa oferece riscos mínimos a participantes que sofram de ansiedade por se tratar de resolução de problemas. Oferece riscos físicos mínimos aos participantes em relação a cortes causados pelo papel ao manuseá-lo.

Como esses riscos serão cuidados?

Suas informações e seu nome NÃO serão divulgados. Somente o pesquisador e/ou equipe de pesquisa saberão de seus dados e prometemos manter tudo em segredo. Caso você deseje participar, se a qualquer momento você se sentir mal por sintomas de ansiedade ou cansaço, orientamos que deixe de participar, pois você não sofrerá nenhuma perda ou diminuição no rendimento escolar. Pedimos que esteja atento às orientações do professor para evitar corte com o papel.

Por que sua participação é importante e pode ser boa para você?

Esta pesquisa vai ajudar você a: Aprender mais sobre triângulos semelhantes, suas áreas, seus ângulos e também sobre como a arte da dobradura pode ser útil e divertida na aprendizagem. Sem contar que a pesquisa também trará benefícios a outras pessoas pelo avanço da ciência, e você estará participando disso. Também podemos te contar sobre os resultados durante e ao final da pesquisa.

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

Você gostaria de participar deste estudo?
Faça um x na sua escolha.

Sim, quero participar (_) **Não quero participar (_)**

Se você marcou sim, por favor assine aqui:

Declaração do participante

Eu, ____, aceito participar da pesquisa. Entendi as informações importantes da pesquisa, sei que não tem problema se eu desistir de participar a qualquer momento. Concordo com a divulgação dos dados obtidos neste estudo e a autorizo, desde que mantida em sigilo a minha identidade. Os pesquisadores conversaram comigo e tiraram as minhas dúvidas.

Assinatura: ______________________________________ data:_______________________

Acesso à informação

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com Vinicius Coelho Fialho, pesquisador responsável, nos telefones (24) 3365-1415, celular (24)99559-2500, endereço Rua Bruno Andréia, 52, Parque das Palmeiras, Angra dos Reis e e-mail vinifialho@gmail.com . Este estudo foi analisado por um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) que é um órgão que protege o bem-estar dos participantes de pesquisas. Caso você tenha dúvidas e/ou perguntas sobre seus direitos como participante deste estudo ou se estiver insatisfeito com a maneira como o estudo está sendo realizado, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, situado na BR 465, Km7, CEP 23.897-000, Seropédica, Rio de Janeiro/RJ, sala CEP/PROPPG/UFRRJ localizada na Biblioteca Central, telefones (21) 2681-4749, e-mail eticacep@ufrrj.br, com atendimento de segunda a sexta, das 08:00 às 17:00h por telefone e presencialmente às terças e quintas das 09:00 às 16:00h.

Declaração do pesquisador

Declaro que obtive o assentimento do menor de idade para a participar deste estudo e declaro que me comprometo a cumprir todos os termos aqui descritos.

Nome do Pesquisador:____
Assinatura: ______________________________________ Local/data:_______________________

**Este termo foi elaborado a partir do modelo de TALE do CEP/Unifesp e orientações do CEP/IFF/Fiocruz.*

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a autorizar o(a) menor sob sua responsabilidade participar de uma pesquisa intitulada "Trabalhando semelhança de triângulos com a dobradura do copo". O objetivo desta pesquisa é desenvolver o conhecimento sobre triângulos semelhantes utilizando dobradura (origami). O pesquisador responsável por esta pesquisa é Vinicius Coelho Fialho, ele é professor do colégio Acec, aluno do PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Você receberá os esclarecimentos necessários antes, durante e após a finalização da pesquisa, e asseguro que os dados do(a) menor sob seus cuidados não serão divulgados, sendo mantido o mais rigoroso sigilo, em favor de não o(a) identificar.

As informações serão obtidas da seguinte forma: inicialmente será aplicado um questionário para verificar o conhecimento do aluno(a) na matéria de semelhança de triângulos de 15 a 20 minutos. Após, será apresentado a atividade da dobradura e as aplicações dos conceitos a serem abordados que durará de 30 a 40 minutos. Ao final da apresentação será reaplicado o questionário para uma segunda avaliação dos conceitos aprendidos e um bate papo sobre a atividade e o tema abordado.

A participação do(a) menor sob sua responsabilidade envolve os seguintes riscos previsíveis: A pesquisa oferece riscos mínimos a participantes que sofram de ansiedade por se tratar de resolução de problemas. Oferece riscos físicos mínimos aos participantes em relação a cortes causados pelo papel ao manuseá-lo. A sua participação pode ajudar os pesquisadores a entender melhor sobre triângulos semelhantes, suas áreas, seus ângulos e também sobre como a arte da dobradura pode ser útil e divertida na aprendizagem. Sem contar que a pesquisa também trará benefícios a outras pessoas pelo avanço da ciência, e você estará participando disso. Também podemos te contar sobre os resultados durante e ao final da pesquisa.

O(a) menor sob sua responsabilidade está sendo consultado sobre seu interesse e disponibilidade de participar desta pesquisa. Ele(a) é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento. A recusa em participar não acarretará penalidade alguma.

O(a) menor sob sua responsabilidade não será remunerado por ser participante da pesquisa. Se houver gastos com transporte ou alimentação, eles serão ressarcidos pelo pesquisador responsável. Todas as informações obtidas por meio de sua participação serão de uso exclusivo para esta pesquisa e ficarão sob a guarda do/da pesquisador/a responsável. Caso a pesquisa resulte em dano pessoal, o ressarcimento e indenizações previstos em lei poderão ser requeridos pelo participante. Os pesquisadores poderão informar os resultados ao final da pesquisa por meio de e-mail fornecido.

Caso você tenha qualquer dúvida com relação à pesquisa, entre em contato com o pesquisador através dos telefones (24) 3365-1415 (trabalho), (21) 99559-2500 (celular pessoal), pelo e-mail vinifialho@gmail.com e endereço profissional/institucional Rua Bruno Andréia, 52, Parque das Palmeiras, Angra dos Reis, CEP 23906-410.

Este estudo foi analisado e aprovado por um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP). O CEP é responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de pesquisas envolvendo seres humanos, visando garantir o bem-estar, a dignidade, os direitos e a segurança de participantes de pesquisa; bem como assegurando a participação do(a) pesquisador(a) sob os mesmos aspectos éticos.

Este estudo foi analisado por um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) que é um órgão que protege o bem-estar dos participantes de pesquisas. Caso você tenha dúvidas e/ou perguntas sobre os direitos do(a) participante deste estudo sob sua responsabilidade, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

(CEP) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, situado na BR 465, km 7, CEP 23.897-000, Seropédica, Rio de Janeiro/RJ, sala CEP/PROPPG/UFRRJ localizada na Biblioteca Central, telefone (21) 2681-4749, e-mail: eticacep@ufrrj.br com atendimento de segunda a sexta, das 08:00 às 17:00 por telefone e presencialmente às terças e quintas das 09:00 às 16:00h. Este estudo foi analisado e aprovado por um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) sob o registro CAAE ______________________. O CEP é responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de pesquisas envolvendo seres humanos, visando garantir o bem-estar, a dignidade, os direitos e a segurança de participantes de pesquisa; bem como assegurando a participação do(a) pesquisador(a) sob os mesmos aspectos éticos.

No caso de autorizar o(a) menor sob sua responsabilidade a participar da pesquisa, você e o pesquisador devem rubricar todas as páginas e também assinar as duas vias deste documento. Uma via é sua e a outra via ficará com o pesquisador.

Para mais informações sobre os direitos dos participantes de pesquisa, leia a **Cartilha dos Direitos dos Participantes de Pesquisa** elaborada pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (Conep), disponível no site:
http://conselho.saude.gov.br/images/comissoes/conep/img/boletins/Cartilha_Direitos_Participantes_de_Pesquisa_2020.pdf

Consentimento do responsável do participante

Eu, abaixo assinado, entendi como é a pesquisa, tirei dúvidas com o(a) pesquisador(a) e aceito participar, sabendo que posso desistir a qualquer momento, mesmo depois de iniciar a pesquisa. Autorizo a divulgação dos dados obtidos neste estudo, desde que mantida em sigilo minha identidade. Informo que recebi uma via deste documento com todas as páginas rubricadas e assinadas por mim e pelo Pesquisador Responsável.

Nome do(a) participante:____

Nome do(a) responsável: ____

Assinatura: ____ local e data:________________________

Declaração do pesquisador

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária, o Consentimento Livre e Esclarecido deste participante (ou representante legal) para a participação neste estudo. Declaro ainda que me comprometo a cumprir todos os termos aqui descritos.

Nome do Pesquisador: Vinicius Coelho Fialho
Assinatura: ____ Local/data:_______________________

**Este termo foi elaborado a partir do modelo de TCLE do CEP/Unifesp e orientações do CEP/IFF/Fiocruz.*

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa